

Arhe VII, 13/2010

UDK 1:51

Prethodno saopštenje

Preliminary Communication

RADOSLAV MILOŠEVIĆ  
Filozofski fakultet, Istočno Sarajevo (Pale)

## LA CRITIQUE DE PLATONISME MATHÉMATIQUE

**Résumé:** Le développement de la mathématique dans la direction d'une science plus exacte a justement amené jusqu'à la critique de platonisme mathématique. Ils se sont apparus les questions qui n'avaient existées ni dans «la mathématique classique» ni dans la logique. Voilà quelques de ces questions: Qu'est-ce que c'est qu'un objet de calcul effective, en effet, qu'est-ce que c'est qu'un objet de la construction mathématique?

Quels preuves, conclusions, nombres, fonctions ou formules pouvons-nous considérer réalisables, calculables ou de calcul effective? Nous allons essayer considérer le fond de ce problème avec cette œuvre.

**Mots-clés:** les mathématiques, platonisme, Gödel, la déféctuosité, la déféctibilité.

Pendant trente ans du XXe siècle les découvertes merveilleuses de Kurt Gödel ont provoqué la multiplication des théories et des disciplines mathématiques dont le nombre même plus de cinquante est assez grand de nos jours.

Dans le temps moderne la mathématique constructive, qui ne s'est pas encore explicitement constituée, fait des essais d'une interprétation tout à fait nouvelle de toute la mathématique. Cependant, ce sont les découvertes de Gödel qui lui ont précédées aussi.

Kurt Gödel, mathématicien américain, d'origine tchèque, est né en 1906. Depuis 1953. il est le professeur de l'Institut des études avancées à Princeton aux Etats-Unis. Dans la plupart des cas il s'occupe de la logique mathématique et découverte axiomatique dans la mathématique. La découverte la plus connue de Gödel est la théorème d'après laquelle chaque système des axiomes qui n'est pas contradictoire est incomplet dans ce sens-là que nous lui pouvons ajouter encore un axiome qui n'est pas au contresens avec celui-ci. Autrement dit, si le système des axiomes n'est pas contradictoire, dans la théorie existe une affirmation qui n'en utilisant que les axiomes fondamentaux ne peut être ni prouvée ni renversée.

Gödel a aussi prouvé à ce propos qu'il est impossible logiquement de faire la preuve d'harmonie d'un système des axiomes avec ces axiomes mêmes.

Ces investigations merveilleuses de Gödel ont été possibles grâce à l'opulence des matériaux mathématiques pleins d'intuitionnisme, de logicisme, de formalisme et d'interprétations traditionnelles d'ensemble comme les systèmes mathématiques-philoso-

phes qui sont incompatibles et incomplets. Le matériau en se concernant de la logique et de la théorie de dérivation a expressément subi « le point critique ». Les résultats concrets sont amenés jusqu'à la perfection par Rasl et par Uajthed dans la logique et par Hilbert dans la mathématique fondamentale. Les spécialistes de ce temps-là ont connu la conception d'arithmétique formalisée de Frege. Ensuite le système formel axiomatique de la théorie des ensembles a été exactement fait par Zermelo et par Frankel. Le plus grand effet en avait le livre Principia Mathematica écrit par Rasl et par Uajthed.

Les ouvrages de G. Bul ont obtenu une nouvelle interprétation ce qui avait représenté un grand succès dans toute l'algèbre. Si nous y ajoutons les manifestes intuitifs de Brauer il est compréhensible ce qui a amené la logique dans une analyse spéciale et critique et dans une nouvelle investigation. Nous pouvons dire à bon droit que Brauer a un grand mérite dans l'histoire de mathématique et de logique parce que c'est lui qui a posé le premier la question de sa nouvelle investigation radicale. Enfin, le programme d'Hilbert s'est aussi montré instable aux points principaux ce qui a donné aux investisseurs une nouvelle impulsion et les a obligés aux nouveaux travaux.

La th é o r è m e d e G ö d e l d' i n c o m p l e t des système axiomatiques a influencé le plus de se constituer une nouvelle conception sur les moyens déductifs et tout cela s'est montré après comme une critique sérieuse du platonisme mathématique. Ce procès a commencé se développer tout d'un coup les années trentes de notre siècle et il dure encore jusqu'aux nos jours. C'est pourquoi nous pouvons nommer les années trentes « la décennie d'or » de la logique mathématique. En effet, dans cette période-là la logique a évolué de « la belle fille » de mathématique à sa part organique qui était très importante. Quoiqu'il y eût une opulence des travaux dans cette période-là ils n'ont pas fait des sensations scientifiques parce qu'ils se sont multipliés imperceptiblement et dans le calme. Les discussions très connues de nos jours de K. Gödel, A. Church, J. Herbrandt, S. C. Kleene, A. M. Turing, A. Tarski, J. Lukasijevic et d'autres logiciens des années trentes n'ont pas dépassé les limites d'un petit groupe des professionnels. Les savants énumérés appartenaient à une nouvelle génération et la plupart d'eux est encore vivants. Ils étaient les pionniers d'une nouvelle conception des moyens déductifs de la science. Dans le temps des polémiques entre Brauer et Hilbert, ces savants se sont considérés très jeunes et incompetents de s'y méritoirement inclure. Ils les considéraient les géants de la mathématique qui menaient la guerre avec succès. Dans cette période-là ils n'ont pas pressenti que leurs travaux avec les thèmes spéciaux influenceraient essentiellement à la méthodologie des sciences exactes et mathématiques en même mesure que les publications célèbres des autorités reconnues de mathématique.

C'est « la décennie d'or » de la logique mathématique qui mérite des considérations particulières mais notre intention ici n'est pas d'explorer cette période-là. Nous allons nous borner ici aux explications des résultats qui ont directement influencé le commencement de la cybernétique, plus précisément le commencement de la théorie d'algorithmes, c'est-à-dire, des théories de calcul effective. Le développement de la mathématique dans la direction d'une science de plus en plus exacte a déployé encore plus la critique de la platonisme mathématique. C'est cette critique-là qui a provoqué

les questions qui n'avaient existées ni dans la mathématique ni dans la logique. Voilà seulement quelques de ces questions: Qu'est-ce que c'est qu'un objet mathématique constructif, autrement dit, qu'est-ce que c'est qu'un objet de la construction mathématique? Quels preuves, résumés, chiffres, fonctions ou formules pouvons-nous considérer réalisables, calculables ou de calcul effective?

Regardons l'essence de cette problème! Par exemple, prenons le nombre  $2^{64}$ . Malgré que ce nombre soit très grand nous pouvons l'enregistrer dans un simple

4  
4  
4

système décimal de dénombrement. Cependant le nombre 4 nous ne pouvons pas enregistrer dans cette forme-là parce que ni papier ni couleur d'impression du monde entier ne pourrait pas l'entourer. Pourtant exclure ces nombres de la mathématique n'aurait aucun sens. Comme toutes les sciences théoriques, la mathématique aussi part des suppositions réelles jusqu'à l'abstraction en se servant de différentes idéalizations. Spécialement pour les preuves et les déductions mathématiques, il est nécessaire de disposer d'assez de papier et de crayons pour écrire les formules sans égard à la longueur et à la complexité des preuves. En outre, il est indispensable de supposer que nous avons assez de temps de calculer. Avec ces permissions tout à fait justifiées le

4  
4  
4

nombre 4 existe en apparence et il est considéré comme un objet de calcul effective quoique personne ne l'écrivit jamais sur le papier. Autrement dit, à l'aide des suppositions indispensables il serait possible l'écrire. La calcul effective d'objet avec une telle compréhension se réduit à une thèse de sa réalisation potentielle. Donc, un objet peut être considéré celui de calcul effective s'il peut être apparemment obtenu (écrit ou réellement construit) en y disposant du temps (qui peut être extrêmement long mais en tout cas final) de l'espace (telles dimensions sans y ajouter aucune restriction) et des matériaux (dont la quantité pourrait dépasser même la part connue de l'Univers).

Pour obtenir un objet de calcul effective il faut faire en tout cas un nombre définitif des calculations. Quel caractère peuvent avoir ces étapes de calculations? Ces pas de calculations peuvent être des procédés réels qui sont perfectionnés par les symboles comme les formes matérielles mais ils peuvent être abstraitement interprétés. Il faudrait simplement que ces procédés aient un caractère élémentaire de calcul. En faisant un tel objet il est très possible de faire souvent les fautes en généralisant intuitivement les phases de calcul avec lesquelles nous nous embrouillerions dans les situations paradoxales. A l'aide des abstractions adéquates dans les étapes de calcul en tout cas nous devrions les éviter. Pour obtenir un objet de calcul effective il existe un nombre illimité des formes possibles. Le choix différent de ces formes détermine de divers accès vers la précision d'idée de calcul. Nous ne considérons que quelques

d'entre eux qui sont très connus dans la littérature étrangère pendant que dans la nôtre ils ne sont presque ni élaborés ni traités.

Le premier abord vers la précision d'idée de calculation est *r e c u r s i v e*. Les deux autres abords sont les machines de Turing et les algorithmes normaux de Markovljev. Tous les trois abords, la thèse de Church le montrera aussi, sont équivalents entre eux. Ils ne sont pas seulement ces trois abords équivalents entre eux mais tous les autres abords se sont montrés équivalents comme la formalité de Kleene, l'interprétation d'Herbrandt-Gödel des ensembles recursifs comptables et les autres dont nous n'y parlerons pas en détail. Il serait désirable peut-être prendre en considération la calculation c'est-à-dire la calculation chez les machines électroniques de calculation dans le sens d'applications des algorithmes et des théories de calculation effective dans le but de généraliser l'hypothèse fondamentale de Church.

La thèse de Church est la première phase qui rendrait possible de mettre en relief l'hypothèse fondamentale de la théorie des algorithmes, des théories de calculation effective. La thèse de Church s'est rapporté aux fonctions partiellement recursives pendant que Kleene l'a généralisée aux fonctions recursives générales aussi. Les thèses de Turing et de Markovljev seraient l'équivalent de celle de Church dans le cadre de sa formalité. Toutefois, il serait justifiable de remplacer ces thèses partielles par cette thèse générale avec laquelle nous pourrions affirmer pour sûr que toutes ces différentes précisions d'idée d'algorithme et de calculation sont équivalentes entre elles. De toute façon, les fonctions recursives les machines de Turing et les algorithmes normaux de Markovljev, chacune avec les termes de son langage spécifique, décrivent en détail cette idée. Cette « pré-formulation » de thèse de Church mérite encore plus de finir son apprentissage soit de l'aspect philosophique soit de l'aspect de la méthodologie mathématique et spécialement de l'aspect cybernétique. Nous le mentionnerons partiellement seulement dans la mesure d'exigence d'explication des algorithmes et des théories de calculation effective dans la fonction de constituer la mathématique constructive.

Tout d'abord il faut mettre en relief la différence entre les théories constructives et celles de calculation effective. Il est le plus compétent ici citer A. Heyting d'après le livre connu « De l'intuitionnisme » : « Selon une théorie de calculation effective une certaine classe des objets mathématiques est définie comme la classe des objets de calculation effective. Ce qui est important ici, c'est d'une part on suppose une théorie mathématique dans laquelle la classe des objets de calculation effective peut être définie d'autre part le concept défini mais non un concept primaire et il existe encore une certaine liberté de choix de définition de calculation effective sans supposer qu'elle correspond suffisamment à notre concept, intuitif de la construction mathématique.

... Sous une théorie constructive nous sous-entendons une théorie d'après laquelle nous pouvons considérer un objet seulement dans le cas quand il est déjà construit. Autrement dit, dans une théorie constructive nous ne pouvons mentionner d'autres objets que ceux de calculation effective...

Nous ne pouvons en conclure que seulement les objets de calculation effective sont considérés existants et il en suit qu'ils ne constituent pas une sous-classe de tous les objets mathématiques.

Dans la théorie constructive il ne peut être aucune référence à un système mathématique qui lui précéderait; elle doit être tout à fait indépendante d'après sa nature. Ce sont les théories récursives qui sont les plus proches à la mathématique classique de toutes les théories de calcul effective et elles auront un rôle dominant dans l'explication. » Voilà ce que E. Post en a déjà dit en 1944. « Si le concept de la fonction récursive générale et formellement équivalent à la calcul effective la formulation de ce concept pourra avoir dans l'histoire de la mathématique discrète un rôle égal à la formulation d'un nombre naturel . » Il est prouvé que la machine de Turing est en mesure de faire tout ce que peuvent faire les fonctions récursives avec les nombres.

Pendant que Markov a posé le but pour lui-même de parvenir jusqu'à la définition commune d'algorithme, la définition qui pourrait renfermer non seulement tous les algorithmes connus mais aussi ceux qui apparaîtraient à l'avenir. (Comme Leibniz. Une idée extraordinaire, mais dans quels paradigmes nous tombons encore?)

L'ensemble des types de calcul est une base mathématique qui permet le renversement d'analyse et en même temps c'est un problème très profond par rapport à la question: « Qu'est-ce que peut faire un calculateur? » Les années cinquantes de notre siècle les calculateurs se sont apparus sur la scène comme la réponse. Ils se sont apparus en tout cas grâce au développement de toutes les mathématiques et toutes les logiques précédées mais aussi grâce aux résultats de Church, de Turing, de Markov. La valeur de thèse de Church a augmenté pendant les années et de nos jours « dans le siècle de cybernétique » elle est devenue beaucoup plus intéressante parce qu'elle est exprimée il y a 30 ans quand il était très difficile d'expliquer son sens aux mathématiciens qui n'avaient pas été spécialistes en logique.

Les théories de calcul effective ne détruisent pas la mathématique mais elles l'ébranlent de fond. La valeur élémentaire de ces théories consiste dans la relation aussi bien avec la pure mathématique qu'avec la logique mathématique et la cybernétique et spécialement avec la théorie d'automates. Leurs structures abondent en beauté et en naturel. Ces théories donnent aussi une nouvelle et souvent profonde vue sur les autres sphères. Elles-mêmes sont devenues des dilemmes et des erreurs de paradoxe, d'intuitionnisme et de formalisme. Par l'intermédiaire de ses résultats elles nous mènent dans une nouvelle théorie plus étroite, la théorie de l'indissolubilité et elles nous posent devant les épreuves.

## LITTÉRATURE

1. Kleene S. C., *Introduction to Metamathematics*, Princenton, N.J., 1952
2. B. A. Kusner, *Les leçons de l'analyse de mathématique constructive*, "Nauka", Moscou, 1973.
3. Kajetan Seper, „La mathématique constructive“, *La mathématique*, la revue méthodique spécialisée, 6 (1977), No 3, 69-75, No 4, 19-24.
4. Van J. Heijenoort, *From Frege to Gödel*, Harward university press, Cambridge Mass, 1967.

5. Stephen F. Barker, *Philosophy of Mathematics*, by Prentice-Hall, Inc., 1964.
6. M. Mihaljinec, „La calculation“, *La mathématique*, la revue méthodique spécialisée, 10 (1981), No 4, 40-44.
7. M. S. Presic, „L'introduction dans la logique mathématique“, *Les vues mathématiques 2* (1979), Institut mathématique, Belgrade.
8. V. N. Trostnikov, *Les procès constructifs de la mathématique*, Le livre d'école de Zagreb, 1983., la bibliothèque de mathématique moderne.)
9. Le groupe des auteurs, *Les Nombres*, Le livre d'école de Zagreb, 1985.

RADOSLAV MILOŠEVIĆ

Filozofski fakultet, Istočno Sarajevo (Pale)

#### KRITIKA MATEMATIČKOG PLATONIZMA

**Sažetak:** Američki matematičar češkog porijekla, Kurt Gödel, tridesetih godina 20. vijeka je dokazao da je logički nemoguće provesti dokaz neprotivurječnosti nekog sistema aksioma samim tim aksiomima. Godelova teorema nepotpunosti aksiomatskih sistema je najpresudnije uticala da se izgradi novi pogled na deduktivna sredstva, što se kasnije pokazalo kao ozbiljna kritika matematičkog platonizma. Smisao te teoreme je bilo teško objasniti matematičarima koji nisu bili specijalisti u oblasti logike sve do pojave elektronskih računskih mašina.

**Ključne riječi:** matematika, platonizam, Gödel

RADOSLAV MILOŠEVIĆ

Faculty of Philosophy, Eastern Sarajevo (Pale)

#### CRITICS OF A MATHEMATICAL PLATONISM

**Abstract:** American mathematician of Czech origin, Kurt Gödel, has proved in 1930 that it is logically impossible to prove inconsistency of one system of axioms on the basis of those same axioms. Gödel's theorem of incompleteness of axiomatic systems had most profound influence on developing the new perspective of deductive means, which later came out as a serious critique of mathematical Platonism. It was hard to explain the meaning of that theorem to mathematicians who were not specialized in logics, until the electronic computing machines occurred.

**Keywords:** mathematics, Platonism, Gödel

*Primljeno 21.2.2010.  
Prihvaćeno 10.3.2010.*