

DORĐE VUKAŠINOVIĆ¹

Univerzitet u Beogradu, Filozofski fakultet

GEDEL O KANTOROVOM PROBLEMU KONTINUUMA I: GEDELOVA FILOZOFIJA MATEMATIKE²

Sažetak: *Kantorov problem kontinuuma* je pitanje: Koliko tačaka ima na pravoj u euklidskom prostoru? Kantor (Georg Cantor) je verovao da je broj tačaka na pravoj, tj. *kardinalnost kontinuuma*, prvi beskonačni kardinal koji dolazi posle kardinalnosti skupa prirodnih brojeva. To je gruba formulacija Kantorove hipoteze kontinuuma. Kantor je u više navrata tokom svoje karijere pokušavao da dokaže hipotezu kontinuuma. Međutim, njegov napor nije urodio plodom. Početkom XX veka, teorija skupova biva formulisana kao aksiomatska teorija. Ta aksiomatska teorija se zove *Cermelo-Frenkelova teorija skupova sa aksiomom izbora*, tj., *ZFC* teorija skupova. Na osnovu rezultata Gedela (Kurt Gödel) i Koena (Paul Cohen), znamo da teorija *ZFC* niti dokazuje, niti opovrgava Kantorovu hipotezu, te Kantorov problem kontinuuma ostavlja nerešenim. Međutim, prema Gedelovom mišljenju, Kantorov problem kontinuuma se može rešiti proširivanjem teorije skupova *ZFC* novim aksiomama koje će nam dati celovitiji uvid u strukturu univerzuma skupova. Ovaj rad je prvi u nizu od dva rada u kojima nam je cilj da predstavimo neke od Gedelovih predloga za pristup rešavanju Kantorovog problema kontinuuma, kao i Gedelovu platonističku filozofsku poziciju koja stoji u osnovi tih predloga. Ovaj rad je fokusiran na predstavljanje Gedelove filozofije matematike. U tom cilju ćemo prvo predstaviti reprezentativne pravce u filozofiji matematike i njihove glavne predstavnike. Potom ćemo objasniti šta je Hilbertov program i kakve su, prema Gedelovom mišljenju, posledice nemogućnosti njegovog sprovođenja. Zatim se bavimo ontološkim, a na kraju epistemološkim aspektom Gedelovog platonizma.

Ključne reči: Godel, platonizam, teorija skupova, hipoteza kontinuuma

¹ E-mail adresa autora: dj.vukasinovic@stud.f.bg.ac.rs

² Ovaj rad sadrži drugi deo autorovog završnog rada pod nazivom *Gedel o Kantorovom problemu kontinuuma* koji je odbranjen na Univerzitetu u Beogradu – Filozofskom fakultetu septembra meseca 2021. godine.

UVOD

Koliko tačaka ima na pravoj u euklidskom prostoru? Koja je kardinalnost kontinuuma – skupa realnih brojeva? Koliko podskupova ima skup prirodnih brojeva? Ova pitanja su ekvivalentna, u tom smislu što odgovor na jedno daje odgovor na sva druga. Svako od ovih pitanja je jedan način da se postavi *Kantorov problem kontinuuma*.³

Kantor (Georg Cantor), tvorac teorije skupova, verovao je da je kardinalnost kontinuuma prvi beskonačni kardinal koji dolazi posle kardinalnosti skupa prirodnih brojeva. To je gruba formulacija Kantorove *hipoteze kontinuuma* (*CH*).⁴ Kantor je u više navrata tokom svoje karijere pokušavao da dokaže hipotezu kontinuuma. Međutim, njegov napor nije urodio plodom.

Početkom XX veka, teorija skupova biva formulisana kao aksiomska teorija naporima, pre svega, Cermela (Ernst Zermelo) i Frenkela (Abraham Fraenkel). Ta aksiomska teorija se zove *Cermelo-Frenkelova teorija skupova sa aksiomom izbora*, tj. *ZFC* teorija skupova.⁵ Na osnovu rezultata Gedela (Kurt Gödel) i Koena (Paul Cohen), znamo da teorija skupova *ZFC* niti dokazuje, niti opovrgava Kantorovu hipotezu, te Kantorov problem kontinuuma ostavlja nerešenim.⁶ Međutim, prema Godelovom mišljenju, Kan-

³ Gödel, K., „What is Cantor’s continuum problem? 1947” u *Kurt Gödel. Collected works. Volume II. Publications 1938 – 1974.* (priredili S. Feferman, J. W. Dawson Jr., S. C. Kleene, G. H. Moore, R. M. Solovay and J. van Heijenoort), Oxford University Press, Oxford 1990., str. 176.

⁴ Hipoteza kontinuuma, odnosno njene posledice, garantuju da je:

$$2^{\aleph_0} = |P(\omega)| = \aleph_1$$

Pri tome: $\aleph_0$ je prvi beskonačni kardinal; $\aleph_1$ je drugi beskonačni kardinal i prvi neprebrojiv kardinal; $|A|$ je kardinalnost ili broj elemenata skupa A ; $P(A)$ je partitivni skup, odnosno skup svih podskupova skupa A ; ω je skup prirodnih brojeva.

⁵ Teorija *ZFC* je teoriju prvog reda nad jezikom koji čini jedan binarni predikat $\in$, koji označava relaciju *pripadnosti*. Nelogičke aksiome teorije *ZFC* se neformalno mogu predstaviti na sledeći način:

- *Ekstenzionalnost*: Skupovi su jednaki, ako imaju iste elemente.
- *Zasnivanje*: Svaki skup ima najmanji element u odnosu na relaciju pripadnosti.
- *Unija*: Za svaki skup, postoji skup svih elemenata njegovih elemenata.
- *Partitivni skup*: Za svaki skup, postoji skup svih podskupova tog skupa.
- *Beskonačnost*: Postoji beskonačan skup.
- *Zamena*: Kolekcija slika definibilne funkcije čiji je domen skup jeste skup.
- *Izbor*: Za svaku nepraznu familiju međusobno disjunktih nepraznih skupova postoji skup koji sadrži po tačno jedan element svakog skupa iz te familije.

⁶ Godel je konstruisao najmanji unutrašnji (klasni) model *L* teorije skupova koji se zove *konstruktibilni univerzum* i pokazao da su u tom modelu istinite sve aksiome *ZFC*, ali i *CH*. Time je ustanovljeno da *ZFC* ne opovrgava *CH*. Nasuprot Godelu koji se služio *metodom unutrašnjih modela*, Koen se služio *metodom spoljašnjih modela*, odnosno *forsingom* i poka-

torov problem kontinuuma se može rešiti proširivanjem teorije skupova *ZFC* novim aksiomama koje će nam dati celovitiji uvid u strukturu univerzuma skupova.

Ovaj rad je prvi u nizu od dva rada u kojima nam je cilj da predstavimo neke od Godelovih predloga za pristup rešavanju Kantorovog problema kontinuuma, kao i Godelovu platonističku filozofsku poziciju koja stoji u osnovi tih predloga. Ovaj rad je fokusiran na predstavljanje Godelove filozofije matematike. Razmatranje Godelove filozofije matematike za svrhe predstavljanja njegovih predloga za rešavanje Kantorovog problema kontinuuma je od značaja jer naš stav o Kantorovom problemu kontinuuma diktira filozofska pozicija koju implicitno ili eksplicitno prihvatamo. Ne samo da „status” Kantorovog problema biva određen pozadinskom filozofijom matematike, nego i način njegovog rešavanja. U cilju razjašnjenja navedenog, prvo ćemo predstaviti reprezentativne pravce u filozofiji matematike i njihove glavne predstavnike. Potom ćemo objasniti šta je Hilbertov program i kakve su, prema Godelovom mišljenju, posledice nemogućnosti njegovog sprovođenja. U trećem odeljku ovog dela rada se bavimo ontološkim, a u četvrtom epistemološkim aspektom Godelovog platonizma. Te teme bi trebalo da nam omoguće jasniji uvid u Godelove predloge za rešavanje Kantorovog problema.

PRAVCI U FILOZOFIJI MATEMATIKE

Po uzoru na Došena, razmotrimo na koje načine možemo odgovoriti na pitanje: da li se iskazi matematike odnose na nešto, u tom smislu što „im kao jezičkim objektima odgovara nešto što oni opisuju”?⁷ Ako na to pitanje odgovorimo sa „ne”, onda zastupamo poziciju koja se zove *čisti formalizam*. Ako na pitanje odgovorimo sa „da”, onda imamo dve opcije. Ako tvrdimo da to što matematički iskazi opisuju zavisi od ljudskog uma, onda zastupamo poziciju koja se zove *konstruktivizam*. Ako tvrdimo da to što matematički iskazi opisuju ne zavisi od ljudskog uma, onda zastupamo poziciju koja se naziva *platonizam*. Dalje ćemo predstaviti ove pozicije i filozofije njihovih glavnih predstavnika.

Grubo govoreći, za formalistu je matematika sistem pravila za manipulaciju matematičkim simbolima. Semantičke kategorije (istinitost, referencija

zao da postoji model u kojem su istinite sve aksiome *ZFC* i $\neg CH$. U sadejstvu sa Godelovim rezultatom, ovime je dokazano da je *CH* nezavisno.

⁷ Mijajlović, Ž., Marković, Z. i Došen, K., *Hilbertovi problemi i logika*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 1986, str. 53.

i sl.), ukoliko se ne mogu svesti na sintaksne, jesu izlišne prema mišljenju formalista.⁸ Fregeovo (Gottlob Frege) shvatanje formalne teorije (sistema) je omogućilo preciziranje formalističke pozicije. Konstruišući dokaze u nekoj formalnoj teoriji nismo zainteresovani za značenje nizova simbola koji u tom dokazu figuriraju. Radi se o pukoj manipulaciji simbolima shodno pravilima koja su tom teorijom data. Ideja je da se matematika shvati kao formalna teorija ili kao skup formalnih teorija.⁹

Jedan važan predstavnik formalizma je veliki nemački matematičar David Hilbert (David Hilbert). Hilbert nije bio zastupnik čistog formalizma, kako smo ga upravo opisali. Njegov formalizam je imao i konstruktivističku komponentu.¹⁰ Jedan deo matematike zaista čine neinterpretirani nizovi simbola, dok drugi čine tvrđenja o nekakvim (konačnim) grafičkim konstruktima ljudskoga uma, kako ih Došen naziva,¹¹ pa, samim tim, taj deo matematike za predmet ima stvarnost koju opisuje. Da pojasnimo. Hilbert matematiku deli na *finitističku* i *infinitističku*.¹² Ova podela ostaje na intuitivnom planu: matematika je finitistička kada se ne poziva na beskonačnost; inače je infinitistička.¹³ Objekti kojima se finitistička matematika bavi su nalik sledećim:

|, ||, |||, ...

Simboli i iskazi elementarne teorije brojeva su skraćenice i sredstva saopštavanja informacija o takvim nizovima.¹⁴ Na primer, 2 i 3 su, redom, skraćenice za || i |||, dok se iskazom $3 > 2$ tvrdi da niz || širi niz |. Sa druge strane,

⁸ Linnebo, Ø., *Philosophy of Mathematics*, Princeton University Press, Princeton 2017, str. 38 – 39.

⁹ Formalista može govoriti o semantičkim kategorijama. On se, na primer, ne mora odrići teorije modela. Za teoriju modela bi bilo dovoljno reći da sve njene teoreme mogu biti rekonstruisane kao teoreme teorije ZFC, koja nije ništa drugo do jedna formalna teorija. Tako i semantičke kategorije, poput istinitosti, valjanosti, interpretacije i sl., mogu biti čisto sintaksno shvaćene, te, dakle, upotreba tih kategorija nije protivna formalističkim skrupulama.

¹⁰ Mijajlović, Ž., Marković, Z. i Došen, K., *Hilbertovi problemi i logika*, str. 54.

¹¹ Isto, str. 55.

¹² Isto.

¹³ Došen navodi jedan način da se ova podela načini preciznijom. Možda „je finitističku matematiku najbolje zamišljati kao *Skolemovu primitivno rekurzivnu aritmetiku*, ili nešto tome slično” (Mijajlović, Ž., Marković, Z. i Došen, K., *Hilbertovi problemi i logika*, str. 55). Primitivno rekurzivna aritmetika je teorija prvog reda *bez* kvantifikatora. Iz neke finitističke perspektive, kvantifikovanje preko beskonačnih domena deluje problematično, utoliko što se time implicitno zahteva da je beskonačni totalitet objekata o kojima reč na neki način dovršen (da je beskonačnost aktualizovana). (Sam Hilbert aksiome teorije prvog reda koje nam govore o kvantifikatorima naziva *transfinitnim aksiomama* (Hilbert, D., „On the Infinite” u *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879 – 1931* (priredio J. van Heijenoort), Harvard University Press, Massachusetts 1967, str. 382).)

¹⁴ Hilbert, D., „On the Infinite”, str. 377.

infinistitičku matematiku ne treba shvatiti ovako, nego je treba razumeti na način na koji čisti formalista vidi celu matematiku.

Kako ranije rekosmo, prema mišljenju konstruktivista, iskazima matematike odgovara nešto što oni opisuju i ono zavisi od ljudskog uma. Ta zavisnost se sastoji u tome što su predmeti kojima se matematika bavi *konstruisani* od strane matematičara.¹⁵ Barker (Stephen F. Barker) povlači analogiju između matematičara i Boga u vezi sa konstruktivističkim viđenjem stvaralačke aktivnosti matematičara.¹⁶ Međutim, za razliku od Boga, kreativni kapaciteti matematičara su višestruko ograničeni. Matematičar u svojoj imaginaciji može konstruisati samo konačne objekte, a svaki objekat kojim se matematika bavi mora u principu moći biti konstruisan. Tako, konstruktivisti, za razliku od formalista i platonista, zauzimaju revizionistički stav prema matematici.¹⁷ Sve teoreme koje se pozivaju na aktualnu beskonačnost ili čiji dokazi ne sadrže čak ni implicitno uputstvo za konstrukciju objekta o kojem je reč, a koji zadovoljava dato svojstvo, moraju biti odbačeni.

Jedan od važnijih predstavnika konstruktivističke pozicije je veliki holandski matematičar L. E. J. Brauver (L. E. J. Brouwer). Brauverova se filozofija matematike naziva *intuicionizam*,¹⁸ a njene korene Brauver nalazi u Kantovoj (Immanuel Kant) filozofiji.¹⁹ Za razliku od Kanta, za Brauvera i njegove sledbenike intuicionizam nije bio samo apstraktni opis stvarnosti kojom se matematičari bave i matematičke prakse, nego i orijentir za to čime matematičari *moгу* i *treba* da se bave. Brauver je smatrao da odbacivanjem neograničene primene zakona isključenja trećeg – *par excellence* nekonstruktivnog sredstva rasuđivanja – zapravo odbacujemo jedno staro i pogrešno verovanje koje je analogno verovanju u racionalnost broja π i drugim sličnim neistinama.²⁰ Odbacivanje neograničene primene zakona isključenja trećeg i aktualne beskonačnosti, Brauver je branio pozivanjem na „osnovnu intuiciju matematike”, „intuiciju puke dvojnosti”.²¹ Kako se nama čini, Brauver na umu ima sledeće. Opažanjem kvalitativnih razlika u

¹⁵ Mijajlović, Ž., Marković, Z. i Došen, K., *Hilbertovi problemi i logika*, str. 53.

¹⁶ Barker, S., *Filozofija matematike*, Nolit, Beograd 1973, str. 134.

¹⁷ Horsten, L., „Philosophy of Mathematics”, <https://plato.stanford.edu/archives/win2023/entries/philosophy-mathematics/> 10.10.2024.

¹⁸ Linnebo, Ø., *Philosophy of Mathematics*, str. 73.

¹⁹ Brouwer, L. E. J., „Intuitionism and formalism” u *Philosophy of mathematics: Selected readings* (priredili P. Benacerraf i H. Putnam.), Cambridge University Press, Cambridge 1983, str. 78.

²⁰ Brouwer, L. E. J., „Consciousness, philosophy, and mathematics” u *Philosophy of mathematics: Selected readings* (priredili P. Benacerraf i H. Putnam), Cambridge University Press, Cambridge 1983, str. 94.

²¹ Isto, str. 80.

sadržajima koji su nam dati u pojedinim trenucima našeg mentalnog života i apstrahujući od osećajnog sadržaja (*emotional content*) tih sadržaja, bivaju generisani prirodni brojevi dovođenjem u jedinstvo rezultata te apstrakcije. Ovakav pristup razumevanju aritmetike otvara put i razumevanju geometrije, na temelju Dekartovih (René Descartes) rezultata u vezi sa analitičkom geometrijom, jer se time geometrijski problemi svode na algebarske.²²

Podsetimo se da, prema mišljenju platonista, iskazima matematike odgovara od uma nezavisna stvarnost koju oni opisuju. Ontološki posmatrano, stvar je prosta: predmeti matematike su apstraktni entiteti koji postoje nezavisno od ljudskog uma. Međutim, epistemološki, platonizam deluje više nego zahtevno. Matematičke objekte ne opažamo čulima, niti su oni plod stvaralačke imaginacije matematičara. Ta stvarnost o kojoj je reč deluje krajnje nedostupno.

Platonizam je implicitno prihvaćen kao radna pretpostavka matematičara. Međutim, ako bismo pitali matematičare da se izjasne o svojim filozofskim stavovima o prirodi stvari kojima se bave i o načinima na koje ih saznaju, ispostavilo bi se da je platonizam „sve samo ne opšte prihvaćen”.^{23 24}

Platonizam svoje korene nalazi u delima Platona. Među savremenijim predstavnicima platonizma su veliki matematičari i filozofi Frege, Rasel (Bertrand Russell) i Godel. Na ovom mestu ćemo reći nešto o Fregeovoj poziciji i pomenuti Raselovu. Prema Fregeovom mišljenju, matematički entiteti, poput brojeva i skupova, zajedno sa mislima,²⁵ istinosnim vrednostima i funkcijama,²⁶ čine *treće carstvo* apstraktnih entiteta koji se razlikuju od fizičkih objekata, ali i od mentalnih stanja. Epistemološki aspekt Fregeovog platonizma je u vezi sa njegovim logicizmom. *Logicizam* je projekat čiji je cilj bio

²² Isto.

²³ Adžić, M., *Gedel o aksiomatizaciji teorije skupova*, Doktorska disertacija, Beograd 2004, str. 99.

²⁴ Postoji pozicija u filozofiji matematike koja se zove *radni realizam* (*working realism*), a koju bismo još mogli nazvati *metodološki platonizam*. Prema tom stanovištu, matematiku treba praktikovati *kao da je* platonizam ispravna pozicija (Linnebo, Ø., *Philosophy of Mathematics*, str. 68). Čini se da ovakvu poziciju prihvata i Koen, inače formalista, kada raspravlja o *istinitosti* hipoteze kontinuuma. Videti Maddy, P., „Believing the Axioms. I”, *The Journal of Symbolic Logic*, br. 53 (2), str. 498 – 499.

²⁵ „*Misao*” (*Gedanke*) je Fregeov tehnički termin koji označava apstraktni entitet koji jeste *smisao* (*Sinn*) ili intenzionalnu komponentu značenja iskaza (Frege, G., „O smislu i nominatumu” u *Ogledi o jeziku i značenju* (priredili A. Pavković i Ž. Lazović), Filozofsko društvo Srbije, Beograd 1992, str. 38 – 39), a ne oznaka mentalni proces ili šta tome slično.

²⁶ Pod funkcijama se ovde ne podrazumevaju grafovi. U Fregeovom pojmovnom okviru, funkcije su intenzionalni entiteti. Recimo, pojmovi su poseban slučaj funkcija – unarne funkcije, ili, Fregeovim jezikom, nezasićeni entiteti sa jednim praznim mestom. Više o tome u Frege, G., „Funkcija i pojam” u *Osnove aritmetike i drugi spisi* (priredili F. Grgić i M. Hudoletnjak Grgić), Kruzak, Zagreb 1995.

da se pokaže da su istine matematike u stvari logičke istine.²⁷ Fregeova ideja, prilikom njegove analize epistemičkog pristupa, recimo, brojevima, sastoji se u tome da pitanje o datosti brojeva svede na semantičke osobine rečenica u kojima se javljaju numerali.²⁸ Značenje takvih rečenica može biti shvaćeno analizom primene pojma broja i pozivanjem na neke principe apstrakcije, koji mogu biti shvaćeni kao analitički iskazi.²⁹ ³⁰ Tako nam je pristup trećem carstvu dat analizom značenja reči koje figuriraju u nekom iskazu.

Napomenimo da Fregeova filozofija matematike ima i kantovsku komponentu, utoliko što gorenavedena analiza ne važi za geometriju. Prema Fregeovom mišljenju, u istinitost iskaza geometrije se uveravamo pozivajući se na čiste opažaje *a priori* geometrijskih objekata.³¹ Nasuprot Fregeu, Rasel, takođe logičista, smatrao je da se *cela* matematika može svesti na logiku.³² Međutim, treba istaći da Fregeova, kao i Raselova, koncepcija logike ne odgovara savremenoj. Kada Frege govori o logici, on ima u vidu fragment logike višeg reda koja mu je omogućavala da pravi neka jaka egzistencijalna tvrđenja.³³ Za logiku višeg reda Kvajn (W. V. O. Quine) je kazao da je „teorija skupova u jagnjećoj koži”,³⁴ a teorija skupova svakako nije logika.

HILBERTOV PROGRAM I NEUPOTPUNJIVOST MATEMATIKE

Obično se navodi da je Hilbertov program za cilj imao formulisanje potpune³⁵ i konzistentne³⁶ formalne teorije koja kodifikuje *celu matematiku*. Međutim, time kao da se ispušta iz vida, mada ne nužno, jedan drugi cilj: *eliminacija beskonačnosti*.

²⁷ Mijajlović, Ž., Marković, Z. i Došen, K., *Hilbertovi problemi i logika*, str. 54.

²⁸ Linnebo, Ø., *Philosophy of Mathematics*, str. 29.

²⁹ Frege, G., „Osnove aritmetike: Logičko-matematičko istraživanje pojma broja” u *Osnove aritmetike i drugi spisi* (priredili F. Grgić i M. Hudoletnjak Grgić), Kruzak, Zagreb 1995, str. 76, 89 – 90.

³⁰ Naravno, ovde je implicitna pretpostavka da su svi i samo analitički iskazi logičke istine.

³¹ Isto, str. 39 – 40.

³² Russell, B. *Principles of Mathematics*, Routledge, London 2010, str. 4 – 5.

³³ Jedino egzistencijalno tvrđenje koje logika dokazuje jeste $\exists x \ x = x$, tj., *postoji nešto*. To je prirodno tvrđenje ukoliko primetimo da se radi o jeziku, a jezik je uvek *o nečemu*. Naravno, može se sporiti da li je = logički simbol ili ne.

³⁴ Quine, W. V. O., *Philosophy of Logic*, Harvard University Press, Cambridge 1986, str. 66 – 68.

³⁵ Teorija *T* je *potpuna* akko *T* dokazuje φ ili $\neg\varphi$, za svaku rečenicu φ nad jezikom teorije *T*. Drugim rečima, naša teorija odlučuje svako tvrđenje.

³⁶ Teorija *T* je *konzistentna* akko ne postoji rečenica φ nad jezikom teorije *T* takva da *T* dokazuje φ i $\neg\varphi$.

Projekat eliminacije beskonačnosti Hilbert vidi kao nastavak onoga što je započeo Vajerštras (Karl Weierstraß), koji je eliminisao „beskonačno male i velike veličine (...) iz analize (...) redukcijom iskaza o njima na [iskaze o – prim. prir.] relacijama među konačnim objektima”,³⁷ koristeći i danas standardnu epsilon-delta definiciju limesa.³⁸ Međutim,

beskonačno se i dalje javlja u beskonačnim nizovima brojeva koji definišu realne brojeve, i, dalje, u pojmu skupa realnih brojeva, koji zamišljamo kao aktualno dat totalitet, potpun i zatvoren.³⁹

Pre no što odemo dalje u izlaganju, imajmo u vidu da „eliminisanje beskonačnosti” ne znači njeno izbacivanje iz matematike. Kako Došen kaže, „ograničiti matematiku na finitističku bilo bi sakaćenje za Hilberta”.⁴⁰ ⁴¹ Ideja je da se beskonačnost shvati kao *façon de parler*.⁴² Eliminisanje beskonačnosti je najbolje shvatiti kao opravdanje upotrebe pojma beskonačnosti u matematici pomoću finitističkih sredstava. Infinitistička matematika je korisna i plodna disciplina, a pojam beskonačnosti zahteva pažnju i razjašnjenje,⁴³ pa je neophodno pružiti jedno takvo opravdanje.

Razmotrimo na koji je način Hilbert želeo da sprovede svoj program. Uzmimo da finitistička matematika kodifikovana nekim formalnim sistemom F . Zadržimo se na jednom delu infinitističke matematike, na *Peanovoj aritmetici prvog reda* PA , koja formalizuje aritmetiku prirodnih brojeva. PA je deo infinitističke matematike pošto u PA kvantifikujemo preko beskonačnog domena. Prvi korak u sprovođenju Hilbertovog programa bi bio da se pokaže da je PA konzervativna ekstenzija od F .⁴⁴ Time bismo pokazali da sve što se može reći u PA već jeste rečeno u F . Potom isto treba učiniti za ostale delove matematike. Pošto bi se pokazalo da je infinitistička matematika konzervativna ekstenzija finitističke, time bi bilo dokazano, analogno Vajerštrasovom poduhvatu, da sve što možemo reći pozivajući se na pojam beskonačnosti, možemo reći i bez njega. Međutim, čemu onda infinitistička matematika, ako je sve već rečeno u finitističkoj? Iako nas pozivanje na beskonačnost ne bi

³⁷ Hilbert, D., „On the Infinite”, str. 369.

³⁸ Linnebo, Ø., *Philosophy of Mathematics*, str. 63.

³⁹ Hilbert, D., „On the Infinite”, str. 369.

⁴⁰ Mijajlović, Ž., Marković, Z. i Došen, K., *Hilbertovi problemi i logika*, str. 55.

⁴¹ U vezi sa teorijom skupova, koja je *par excellence* deo infinitističke matematike, Hilbert je kazao da „nas niko neće isterati iz raja koji je Kantor stvorio za nas” (Hilbert, D., „On the Infinite”, str. 376).

⁴² Hilbert, D., „On the Infinite”, str. 370.

⁴³ Isto, str. 371.

⁴⁴ Ako su T_1 i T_2 teorije nad, redom, jezicima L_1 i L_2 takvim da L_1 širi L_2 , onda je teorija T_2 konzervativna ekstenzija teorije T_1 akko teorije T_1 i T_2 dokazuju iste rečenice nad jezikom L_1 .

vodilo novim istinama, razlozi za uvođenje tog pojma bi mogli biti pragmatičke ili estetske prirode. Dokazi pojedinih tvrđenja bi uvođenjem tog pojma mogli postati jednostavniji ili lepši.

Međutim, mesto da govori o konzervativnosti infinitističke matematike u odnosu na finitističku, Hilbert pravi jedan skok, pa pitanje konzervativnosti zamenjuje pitanjem konzistentnosti, u prvom redu, PA .⁴⁵ Ovde se nećemo baviti opravdanjem tog skoka, ali treba imati u vidu da se on, uz određene pretpostavke, može opravdati.⁴⁶ Prvo je neophodno dati dokaz konzistentnosti PA koristeći se finitističkim sredstvima koja su sadržana u PA . Potom bi trebalo dokazati relativnu konzistentnost ostalih delova matematike u odnosu na PA . Na kraju bismo dobili jedan potpun i konzistentan formalni sistem koji kodifikuje celu matematiku. Koristeći se činjenicom da je infinitistička matematika I konzistentna akko je I konzervativno proširenje od F , dobijamo i opravdanje upotrebe pojma beskonačnosti. Tako bi bilo dokazano da je infinitistička matematika problematična koliko i finitistička. Dakle, potpuno neproblematična, bar prema Hilbertovom mišljenju. Time bi bila dovršena eliminacija beskonačnosti i Hilbertov program, u svojoj celosti, sproveden u delo.⁴⁷

Međutim, ispostavlja se da Hilbertov program nije moguće sprovesti. Na osnovu prve Godelove teoreme nepotpunosti, nije moguće konstruisati formalnu teoriju koja formalizuje celu intuitivnu matematiku. Na osnovu druge Godelove teoreme nepotpunosti, konzistentnost PA se ne može dokazati sredstvima PA . Ne samo to, nego je svaka jača teorija koja sadrži PA osuđena na istu sudbinu. O posledicama Godelovih teorema po pojam beskonačnosti koji je Hilbert hteo da eliminiše, biće reči ubrzo. Sada ćemo se fokusirati na nepotpunost matematičkih teorija.

Formulišimo Godelove teoreme:

Prva Godelova teorema nepotpunosti. Ako je PA konzistentna teorija, onda je PA nepotpuna.

Druga Godelova teorema nepotpunosti. Ako je PA konzistentna teorija, onda PA ne dokazuje konzistentnost PA .

Kako bi dokazao ove teoreme, Godel je „naučio aritmetiku da govori o sebi”. To je omogućeno kodiranjem formula i nizova formula jezika PA pri-

⁴⁵ Mijajlović, Ž., Marković, Z. i Došen, K., *Hilbertovi problemi i logika*, str. 57.

⁴⁶ Za rekonstrukciju Hilbertovog rezonovanja, videti Mijajlović, Ž., Marković, Z. i Došen, K., *Hilbertovi problemi i logika*, str. 57 – 58.

⁴⁷ Primetimo da bi uspehom Hilbertovog programa konstruktivističko odbacivanje nekonstruktivnih metoda matematike i aktualne beskonačnosti plauzibilno moglo biti okarakterisano kao neopravdano. Takođe, postuliranje nezavisne egzistencije matematičkih entiteta, koje preduzimaju platonisti, moglo bi biti shvaćeno kao bespotrebno umnožavanje entiteta.

rodnim brojevima. Dokazujući prvu teoremu, Godel je konstruisao tvrđenje koje, da tako kažemo, tvrdi da ono samo nije dokazivo u PA . To tvrđenje nazivamo *Gedelovom rečenicom*. Ukoliko PA dokazuje Godelovu rečenicu, PA nije konzistentno. Ukoliko PA ne dokazuje Godelovu rečenicu, onda imamo istinito, ali nedokazivo, aritmetičko tvrđenje. Ubrzo po predstavljanju prve teoreme nepotpunosti, Godel je izveo posledicu te teoreme – drugu Godelovu teoremu nepotpunosti.

Ove su teoreme primenljive na sve teorije koje sadrže PA ili koje su dovoljno jake da mogu da interpretiraju aksiome PA . Recimo, pošto teorija ZFC može da interpretira sve aksiome PA , ZFC je nepotpuna teorija i njena konzistentnost je nedokaziva sredstvima ZFC .

Pored nepotpunosti teorije ZFC koja je posledica teorema nepotpunosti, možemo govoriti i o jednoj drugoj vrsti nepotpunosti koja je posledica nezavisnosti CH . Prva vrsta nepotpunosti je neizbežna i ne predstavlja naročiti razlog za brigu. Svaka naša teorija koja sadrži „dovoljno” aritmetike je takva. S druge strane, nepotpunost koja je posledica nezavisnosti CH nam govori da nešto važno nedostaje našoj teoriji. Teorija skupova koja ne odlučuje CH donekle je analogna aritmetičkoj teoriji koja ne odlučuje da li postoji prirodan broj između 0 i 1.⁴⁸ Čak se i tipovi nezavisnih tvrđenja kod tih dvaju vrsta nepotpunosti razlikuju. Godelova rečenica je veštačko i veoma složeno tvrđenje, napravljeno tako da bude nezavisno, dok je CH prirodno i jednostavno tvrđenje o strukturi stvari kojima se teorija skupova bavi. Međutim, postoje i sličnosti između ovih tipova nepotpunosti. U oba slučaja bi problem nezavisnosti rešavali pozivajući se na neku jaču teoriju koja rešava probleme slabije teorije. Recimo, da bismo dokazali konzistentnost PA , možemo se pozvati na *Peanovu aritmetiku drugog reda* PA^2 . Slično tome, trebalo bi da formulišemo neku jaču teoriju od ZFC koja će nam omogućiti zadovoljavajuće rešenje Kantorovog problema kontinuuma.

Sve ovo nas navodi na temu fenomena *neupotpunljivosti* ili *neiscrpljivosti matematike*. To je fenomen kojem se može pristupiti na više načina, ali koji se odnose na jedinstvenu činjenicu. Grubo govoreći, iz platonističke perspektive, ova činjenica se sastoji u tome da ne možemo dati *potpun* opis univerzuma kojim se matematika bavi. U *Gibs predavanju*⁴⁹, Godel navodi dva načina

⁴⁸ Analogija je Adžićeva, ali korišćena u, donekle, drukčije svrhe (Adžić, M., *Gedel o aksiomatizaciji teorije skupova*, str. 101).

⁴⁹ Gödel, K., „Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications” u Kurt Gödel. *Collected works. Volume III. Unpublished Essays and Lectures*. (priredili S. Feferman, J. W. Dawson Jr., W. Goldfarb, C. Parsons i R. Solovay), Oxford University Press, Oxford 1995.

da se ovom fenomenu pristupi. Prvi se tiče aksiomatizacije matematike, a drugi teorema nepotpunosti. Izložićemo oba načina.

Razmotrimo Gedelovu razliku između *hipotetičko-deduktivnog sistema* i *prave matematike (mathematics proper)*.⁵⁰ Kod hipotetičko-deduktivnih sistema tvrdimo samo uslovnu istinitost teorema. Uslov o kojem je reč je istinitost aksioma tog sistema. Međutim, neka tvrđenja moraju biti bezuslovno istinita kako bismo uopšte tvrdili uslovnu istinitost teorema hipotetičko-deduktivnih sistema. Takve su istine logike. Za razliku od hipotetičko-deduktivnog sistema, aksiomatizacija prave matematike nije proizvoljna. Aksiome prave matematike moraju biti *istinita* i *bez dokaza očigledna* tvrđenja. Takva teorija mora postojati kako bi uopšte bilo hipotetičko-deduktivnih sistema. Kandidat za ovu utemeljivačku teoriju, kakva prava matematika mora da bude, jeste teorija skupova. To je prirodno ukoliko uvidimo da se teorija skupova uzima kao standardna osnova matematike.⁵¹ Svi „uobičajeni” matematički pojmovi i objekti mogu u principu biti rekonstruisani skupovno-teorijski pojmovi, odnosno skupovi, a sve do sada dokazane teoreme u vezi sa tim pojmovima i objektima mogu biti dokazane i u *ZFC*.

Prvi način da se pristupi fenomenu neupotpunljivosti se tiče aksiomatizacije prave matematike shvaćene kao teorije skupova. Pošto aksiome prave matematike moraju da budu istinita i bez dokaza očigledna tvrđenja, onda bi za uveravanje u njihovu istinitost bilo dovoljno da razumemo šta znače reči koje upotrebljavamo kako bismo ih formulisali. Pošto je reč o aksiomatizaciji teorije skupova, ključni pojam je pojam skupa. U odseku *Epistemološki aspekt Gedelovog platonizma* će biti više reči o analizi pojma skupa i aksiomatizaciji teorije skupova koja proizilazi iz nje. Za sada ćemo reći da pojam skupa podrazumeva da su skupovi objekti koji „nastaju” iteriranjem operacije „skup od”, počevši od nekog unapred zadatog skupa.⁵² Univerzum koji odgovara pojmu skupa nalikuje fon Nojmanovoj kumulativnoj hijerarhiji:

Ako (...) počnemo sa prirodnim brojevima, to jest, sa konačnim skupovima posebne vrste, isprva imamo skupove prirodnih brojeva i aksiome koje se na njihov odnos (aksiome prvog nivoa), potom skupove skupova prirodnih sa njihovim aksiomama (aksiome drugog nivoa), i tako dalje za svaku konačnu iteraciju operacije „skup od”. Dalje imamo skup svih ovih skupova konačnog reda. No sada sa ovim skupom postupamo na isti način kao što smo postupili sa skupom prirodnih brojeva, to jest, posmatramo njegove podskupove (odnosno, skupove

⁵⁰ Isto, str. 305.

⁵¹ Kunen, K., *The Foundations of Mathematics*, College Publications, London 2012, str. 14.

⁵² Gödel, K., „Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications”, str. 306.

reda ω) i formulišemo aksiome o njihovom postojanju. Očito, ova procedura može biti iterirana iznad ω , u stvari, do bilo kog transfinitnog ordinalnog broja.⁵³

Pošto se iteracija operacije „skup od” ne može završiti, onda se posao formulisanja aksioma nivoa koji su rezultat iteracije operacije „skup od” ne može završiti. Nijednom našom aksiomatizacijom nećemo moći da obuhvatimo sve nivoe ove hijerarhije, jer će se uvek pokazati da ih ima više no što su naše aksiome u stanju da nam kažu da ih ima.

Gedelove teoreme nepotpunosti, pogotovu druga, čine fenomen neupotpunjivosti naročito očitim.⁵⁴ Konzistentnost ma koje matematičke teorije koja sadrži dovoljno aritmetike je nedokaziva sredstvima te teorije. Da bi se taj problem rešio, neophodno je da se pozovemo na neke jače principe koji dokazuju konzistentnost polazne teorije. Međutim, i ta teorija doživljava istu sudbinu: njena konzistentnost je nedokaziva sredstvima te teorije. Tako možemo da „ređamo” teorije po konzistentnoj snazi, a da je taj proces nemoguće dovršiti.

Kada to imamo u vidu, možemo da razmotrimo i sledeće. Prisetimo se da je jedan od osnovnih ciljeva Hilbertovog programa eliminisanje beskonačnosti. Iz Gedelovog *Gib predavanja* možemo da izvučemo jednu posledicu u vezi sa time. Ukratko, postoje tvrđenja elementarne teorije brojeva koja mogu biti odlučena tek pozivanjem na egzistenciju veoma velikih, beskonačnih objekata. Tako se pozivanje na beskonačnost javlja i kao neophodan uslov za rešavanje čak i problema delova matematike koje smo skloni da nazovemo finitističkim.

Da dodatno pojasnimo. Razlikovali smo nivoe hijerarhije koji su rezultat iteracije operacije „skup od”, prilikom karakterizacije aksiomatizacije prave matematike. Svaki nivo je karakterisan skupom aksioma tog nivoa. Ispostavlja se da postoje iskazi koji se tiču, recimo, nultog nivoa hijerarhije (skup prirodnih brojeva), a koji mogu biti odlučeni tek pozivanjem na aksiome nivoa koji se nalaze daleko iznad nultog nivoa. Recimo, „*ZFC* je konzistentno” je aritmetičko tvrđenje koje može biti dokazano tek pozivanjem na nedostižive kardinalne. Drugim rečima,

aksiome za skupove viših nivoa [hijerarhije – prim. prev.] (...) ni u kojem slučaju nisu ograničene na te skupove, nego, baš suprotno, imaju posledice čak i za nulti nivo, to jest, teoriju prirodnih brojeva. Da budemo precizniji, svaka od ovih skupovno-teorijskih aksioma povlači rešenje određenog diofantovskog problema koji je bio neodlučiv na osnovu prethodećih aksioma. *Diofantovski*

⁵³ Isto.

⁵⁴ Isto, str. 308 – 309.

problemi koji su u pitanju su sledećeg tipa: Neka je $P(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ polinom sa datim celobrojnim koeficijentima i $n + m$ promenljivih, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ i uzmimo promenljive x_i kao nepoznate a promenljive y_i kao parametre; tada je problem: Da li jednačina $P = 0$ ima celobrojna rešenja za celobrojne vrednosti parametara, ili da li ima celobrojnih vrednosti parametara za koje ova jednačina nema celobrojnih rešenja? Svako skupovno-teorijskoj aksiomi može biti pripisan određen polinom P , gde upravo formulisani problem postaje odlučiv na osnovu te aksiome. Današnja matematika još uvek nije naučila da se koristi skupovno-teorijskim aksiomama za rešavanje problema teorije brojeva, osim u slučaju aksioma prvog nivoa. (...) No za ovladavanje teorijom brojeva je dokazivo da je to nedovoljno.^{55 56}

Hilbert je želeo da opravda infinitističku matematiku koristeći se finitističkim sredstvima, ali se ispostavlja da je finitističkoj matematici neophodno opravdanje koju može pružiti jedino infinitistička matematika.

Gedel ističe i jednu posledicu neupotpunivosti za koju kaže da je „matematički ustanovljena činjenica”, koja mu se čini „od velikog filozofskog značaja”.⁵⁷ Činjenica o kojoj je reč je sledeća (inkluzivna) disjunkcija:

*Ili je matematika neupotpunjiva u smislu da njene očigledne aksiome nikada ne mogu biti obuhvaćene konačnim pravilom, odnosno, da ljudski um čak i u oblasti čiste matematike) beskonačno prevazilazi moći bilo koje konačne mašine, ili postoje apsolutno nerešivi diofantovski problemi (...).*⁵⁸

Posledice, pod pretpostavkom ma kog disjunkta, su „odlučno suprotstavljene materijalističkoj filozofiji”, objašnjava Gedel.⁵⁹

Neposredna posledica prvog disjunkta se tiče filozofije duha, pa se u to nećemo upuštati. Međutim, pretpostavka drugog disjunkta sa sobom nosi posledicu da matematika *nije* plod stvaralaštva matematičara,

jer tvorac nužno zna sva svojstva njegove tvorevine, budući da one ne mogu imati bilo koja druga [svojstva – prim. prev.] osim onih koje im je on podario. Čini se da ova alternativa povlači da matematički objekti i činjenice (ili bar *nešto* u njima) postoje objektivno i nezavisno od naših mentalnih akata i odluka.⁶⁰

Dakle, izgleda da drugi disjunkt povlači neki vid platonizma.

⁵⁵ Isto, str. 307.

⁵⁶ Gedel napominje da bi Rimanova hipoteza mogla biti jedno takvo tvrđenje za koje su nam neophodni principi viših nivoa kako bismo ih odlučili. Nažalost, još uvek ne znamo da li je Rimanova hipoteza jedno takvo tvrđenje.

⁵⁷ Isto, str. 310.

⁵⁸ Isto.

⁵⁹ Isto, 311.

⁶⁰ Isto.

Čini se da je Gedeleva ocena da stvaralac mora znati sve osobine svoje tvorevine preterana. Recimo, sajdzija može napraviti sat, ali to ne znači da će on moći da predvidi tačno vreme kada će jedan od zupčanika satnog mehanizma spasti sa osovine. Međutim, Gedel predviđa ovakav prigovor. Primetimo da je Gedel oprezan u svojoj oceni, te da je „bar *nešto*” u matematičkim objektima i činjenicama nezavisno od ljudskog uma. Tako, Gedel objašnjava:

[M]i ne stvaramo mašine ni iz čega, nego ih pravimo od nekog datog materijala. Ako je situacija slična u matematici, onda bi ovaj materijal ili osnova za našu konstrukciju bio nešto objektivno i iznudio bi neko realističko gledište od nas, čak i da su određeni drugi sastojci matematike naša tvorevina.⁶¹

ONTOLOŠKI ASPEKT GEDELOVOG PLATONIZMA

Ontološki i epistemološki aspekt Gedelevog platonizma nisu nezavisni jedan od drugog. Svako oštrije povlačenje demarkacione linije između ovih dvaju aspekata rizikuje da načini izvesne nedorečenosti. Stoga će se naše izlaganje u ovom odeljku ticati *pre svega* ontološkog aspekta Gedelevog platonizma, ali ne i isključivo.

„Uobičajeni” platonizam postulira samo od uma nezavisnu egzistenciju objekata poput skupova ili brojeva. Međutim, Gedel smatra da pored objekata, poput skupova, i pojmovi, koji igraju ulogu intenzionalne komponente značenja predikata, poput skupovno-teorijskih pojmova skupa, klase ili pripadnosti, postoje nezavisno od ljudskog uma. Pogledajmo kako Gedel karakteriše te entitete.

Klase i pojmovi mogu (...) takođe biti shvaćeni kao realni objekti, naime, kao „množine stvari” ili kao strukture koje se sastoje od množina stvari i pojmovi kao svojstva i relacije među stvarima koje postoje nezavisno od naših definicija i konstrukcija.^{62 63}

⁶¹ Isto, 312.

⁶² Gödel, K., „Russell’s mathematical logic” u *Kurt Gödel. Collected works. Volume II. Publications 1938 – 1974.* (priredili S. Feferman, J. W. Dawson Jr., S. C. Kleene, G. H. Moore, R. M. Solovay i J. van Heijenoort), Oxford University Press, Oxford 1990, str. 128.

⁶³ Gedel razlikuje *pojmove (concepts)* od nečega što bismo, u nedostatku boljeg prevoda, mogli da nazovemo *shvatanjima (notions)*. Shvatanja su svojstva i relacije koja zavise od naših konstrukcija i pojmova. Recimo, broj dva možemo definisati kao fon Nojmanov ordinal $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ali i kao Cermelov ordinal $\{\{\}\}$. Međutim, iako takve konstrukcije mogu biti mnogobrojne, ipak „može postojati [samo – prim. prev.] jedna zajednička ‘forma’ ili ‘priroda’” broja 2 (Gödel, K., „Russell’s mathematical logic”, str. 129).

Tekst u „Russell’s mathematical logic” i *Gibs predavanju*, sugerše da, prema Godelovom mišljenju, klase iscrpljuju domen objekata matematičke stvarnosti.⁶⁴ To je prirodno ukoliko uvidimo da Godel smatra da je teorija skupova prava matematika, te da svi objekti kojima se matematika bavi u principu mogu biti konstruisani kao skupovi. Primjenjujući Okamov brijač, možemo „otkloniti višak” objekata kao što su brojevi. Čini se da kod pojmo-va ne bismo mogli da napravimo ovakvu uštedu. Na primer, da bismo uopšte mogli da konstruišemo prirodne brojeve kao skupove posebne vrste, prvo su nam neophodna nekakva svojstva i relacije koje rezultati konstrukcije moraju da zadovolje kako bi bili izdvojeni kao prirodni brojevi.

U *Gibs predavanju* nalazimo tri uopštena argumenta protiv shvatanja matematike kao slobodne ili ljudske tvorevine.⁶⁵ Ti argumenti su „uopšteni” utoliko što imaju širok spektar primene, zavisno od načina na koji preciziramo značenje izraza „slobodna tvorevina”. Pogledajmo kako Adžić sumira te argumente:

Na prvom mestu, (...) ako bi matematika bila ljudska tvorevina, mi sami ne bismo bili lišeni znanja o predmetu koji smo stvorili, bar ne u meri u kojoj to zaista jesmo. Kao drugo, matematičku praksu ne odlikuje sloboda nego nužnost. Matematičari nisu u stanju da pukom snagom sopstvene volje dokazuju važenje svojih teorema. Najzad, izgleda da dokazi tvrđenja o izvesnoj klasi objekata zahtevaju upotrebu objekata druge klase. Na primer, Godel ističe da neki dokazi tvrđenja o prirodnim brojevima zahtevaju upotrebu skupova prirodnih brojeva, pa je i pojam skupa prirodnih brojeva nužan u ovom kontekstu. Ali prirodni brojevi i skupovi prirodnih brojeva nisu iste stvari i stvaranje objekata prve vrste ne čini nužnim stvaranje objekata druge. To znači da ako želimo da utvrdimo svojstva stvari koje smo stvorili moramo ujedno da stvorimo i objekte druge vrste koji će nam u tome pomoći.^{66 67}

⁶⁴ Ovde može doći do nekih terminoloških poteškoća. Godel, po svemu sudeći, prihvata Fregeovu podelu matematičkih entiteta na objekte i pojmove – tj. funkcije, u Fregeovoj terminologiji, – kao što je implicitno pretpostavljeno u našem tekstu. U Fregeovom pojmovnom okviru, objekti i pojmovi se nužno razlikuju. Nezgoda se sastoji u tome što je Godel upotrebio izraz „realni objekti (*real objects*)” kako bi opisao i klase i pojmove. Međutim, izgleda da je Godel time samo želeo da ukaže na od uma nezavisno postojanje ovih entiteta, koristeći izraz koji uobičajeno koristimo kako bismo govorili o fizičkim objektima. Više o tome u Adžić, M., *Gedel o aksiomatizaciji teorije skupova*, str. 144 – 145.

⁶⁵ Gödel, K., „Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications”, str. 314.

⁶⁶ Adžić, M., *Gedel o aksiomatizaciji teorije skupova*, str. 109.

⁶⁷ Adžić i Parsons ove argumente tretiraju kao direktne argumente u prilog platonizmu (Adžić, M., *Gedel o aksiomatizaciji teorije skupova*, str. 109), a ne kao kritiku neke ne-platonističke pozicije. Oba mogu biti tačna. Sva tri argumenta su *reductio ad absurdum* pretpostavke da je matematika ljudska tvorevina, ali, pošto Godel smatra da postoje filozofske

Pošto je izneo ove argumente, Gedel razmatra dve verzije konvencionalizama Karnapovog (Rudolf Carnap) tipa kao pokušaje da se „nejasnom pojmu ‘slobodne tvorevine’ (...) da preciznije značenje”.⁶⁸ Prema mišljenju konvencionalista, iskazi matematike izražavaju „određene aspekte sintaktičkih (ili lingvističkih) konvencija, tj., oni jednostavno ponavljaju delove tih konvencija”.⁶⁹ Iskazi matematike su shvaćeni kao istiniti na osnovu značenja reči od kojih se sastoje i nezavisno od (empirijskih) činjenica. Pri tome, samo značenje je rečima *dodeljeno* od strane matematičara. Uobičajeno je za ovakve iskaze reći da su *analitički*. Međutim, Gedel koristi reč „tautologija” kontrastirajući je reči „analitički”. Kasnije ćemo razmotriti i Godelov razlog za razlikovanje tautologija i analitičkih iskaza, a sada se fokusirajmo na Godelovu kritiku konvencionalizma.

Stipulativne definicije su *par excellence* primer slobodne tvorevine. Stipulativnim definicijama jedan izraz zamenjujemo drugim, obično kraćim. Recimo, *kvadrat* je pravougaonik sa jednakim stranicama. Poslednje je istinito prosto zato što smo se dogovorili da određene reči koristimo na određeni način. Prva varijanta konvencionalističkog stanovišta se koristi ovom idejom. Ako matematiku shvatimo kao jedan skup ovakvih konvencija, onda je svaki iskaz matematike svodiv na tautologije oblika $a = a$. Međutim, time je data i procedura koja u konačno mnogo koraka odlučuje istinitost *svakog* iskaza. Ali takva procedura ne može da postoji, inače bi konzistentnost teorije brojeva bila odlučiva u okviru teorije brojeva.⁷⁰

Druga, sofisticiranija verzija konvencionalizma podrazumeva da

[s]vaki matematički iskaz koji može biti saznat kao istinit (*demonstrable*)⁷¹ može biti dedukovan samo iz pravila o istinitosti i lažnosti rečenica (to jest, bez korišćenja ili poznavanja ma čega drugog osim ovih pravila) i negacija matematičkog iskaza koji može biti saznat kao istinit ne može biti dokazana.⁷²

Postoje primeri za koje važi da je istinitost iskaza izvodiva iz pravila o istinitosti i lažnosti tih iskaza. Recimo, ako u formalnom jeziku iskazne logike uvedemo disjunkciju i negaciju sledećim pravilima:

pozicije koje preciziraju takvo shvatanje matematike (videti dole), onda ta pretpostavka može biti uzeta i kao legitimna filozofska teza čija je kritika data Godelovim argumentima.

⁶⁸ Gödel, K., „Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications”, str. 315.

⁶⁹ Isto, str. 315 – 316.

⁷⁰ Isto, str. 316.

⁷¹ Reč „demonstrable” ovde ne znači „dokazivo” nego je ovde sinonimna izrazu „knowable to be true” (Gödel, K., „Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications”, str. 318).

⁷² Isto, str. 316.

- $\varphi \vee \psi$ je istinito akko je φ istinito ili je ψ istinito;
- $\neg\varphi$ je istinito akko φ nije istinito,

onda jednostavno sledi da je $\varphi \vee \neg\varphi$ istinito na osnovu ovih pravila. Međutim, to ne sledi *samo* na osnovu ovih pravila. Prilikom konstruisanja nekog formalnog jezika, kao i prilikom pridavanja značenja određenim nizovima simbola tog jezika, logički i matematički pojmovi i principi moraju biti primenjeni. Tek kada je sve to na mestu, onda se uz prigodno odabrana pravila o istinitosti i lažnosti određenih reči tog jezika može dedukovati istinitost iskaza tog jezika. Stoga, ako bismo hteli da dokažemo tautološki karakter matematike na ovakav način, naš argument bi se pokazao cirkularnim.⁷³

Gedel navodi i jedan argument koji, prema njegovom mišljenju, pruža opovrgavanje konvencionalizma u onoj meri u kojoj je ono uopšte moguće.⁷⁴ Pretpostavimo da želimo da dokažemo da su aksiome PA tautologije. Dokaz tautološkog karaktera aksioma PA je istovremeno dokaz konzistentnosti PA . Međutim, konzistentnost PA može biti dokazana samo sredstvima koja su striktno jača od aksioma PA . Recimo, možemo se pozvati na postojanje i osobine skupova prirodnih brojeva, o kojima nam govori PA^2 , ili na transfinitnu indukciju do ε_0 ordinala. U svakom slučaju,

određeni *apstraktni* pojmovi (...) moraju biti korišćeni, gde „apstraktni” označava objekte koji se ne odnose na čulne objekte, čiji su simboli poseban slučaj.⁷⁵

Takav je pojam skupa koji se, u slučaju sa konzistentnošću PA , odnosi na skupove prirodnih brojeva ili na ordinale. Dakle, „sintakсни” pojmovi, tj., svojstva i relacije nizova simbola koji su im konvencionalno dodeljeni, nisu dovoljni da se dokaže tautološki karakter PA . Dakle, baš suprotno konvencionalističkom zahtevu, istinitost aksioma PA ne može biti dedukovana samo iz pravila o istinitosti ili lažnosti određenih reči jezika PA , šta god ta pravila bila.⁷⁶

U konvencionalističkom viđenju matematike se element slobodne tvorevine sastoji u konvencionalnom određenju pojmova koji se odnose na određene nizove simbola jezika koji je u pitanju. Ovim Gedelovim argumentima

⁷³ Isto, str. 316 – 317.

⁷⁴ Isto, str. 317 – 318.

⁷⁵ Isto, str. 318.

⁷⁶ Ovaj argument nije primenljiv na neke značajno slabije teorije, poput Presburgerove aritmetike. Konzistentnost Presburgerove aritmetike je dokaziva u Presburgerovoj aritmetici. Međutim, za ovu i slične teorije se može primeniti Gedelov argument iz prethodnog pasusa koji se, iako je slabiji, čini efektivnim.

je pokazano da se pojmovi kojima baratamo u matematici ne iscrpljuju u pojmovima koje smo sami definisali, nego postoje i pojmovi koji ne zavise od naših definicija i konstrukcija. *Ipsa facto*, pokazano je da matematičke istine nisu tautologije. Nasuprot tome, matematičke istine jesu analitički iskazi, odnosno iskazi koji su istiniti na osnovu značenja i nezavisno od (empirijskih) činjenica.⁷⁷ Međutim, „značenje” u domenu matematike nije, ili nije u potpunosti, stvar ljudske tvorevine.

EPISTEMOLOŠKI ASPEKT GEDELOVOG PLATONIZMA

Videli smo da Gödel uzima da su klase i pojmovi konstituenti matematičke stvarnosti, te da za to svoje uverenje nudi i određene argumente. Međutim, ostaje otvoreno pitanje načina na koji saznajemo te entitete. Tom pitanju ćemo se, pre svega, posvetiti u ovom odeljku. Prvo ćemo pokušati da objasnimo šta Gödel podrazumeva pod *matematičkom intuicijom*, koja je shvaćena kao saznajna sposobnost koja nam pruža neku vrstu pristupa univerzumu stvari kojima se matematika bavi. Potom ćemo se baviti pitanjem opravdanja istina matematike.

Matematički entiteti nisu, ili bar nisu u potpunosti, ljudska tvorevina. Sa druge strane, oni svakako nisu predmet čulnog opažanja. Međutim,

bez obzira na udaljenost od čulnog opažanja, mi takođe posedujemo nešto nalik opažanju objekata teorije skupova, što se vidi iz činjenice da nam se aksiome nameću kao istinite.⁷⁸

Ova sposobnost koja nalikuje čulnom opažanju se zove *matematička intuicija*.

Ovakve Godelove napomene u vezi sa matematičkom intuicijom su često rezultirale trenutnim odbacivanjem Godelove filozofske pozicije, uz objašnjenje da se radi o „filozofskom sujeverju”, a da je matematička intuicija jedna „mistična” ili „misteriozna” sposobnost.⁷⁹ Međutim, kao što ćemo videti, čini se da su ovakve kvalifikacije neopravdane.

⁷⁷ Isto, str. 320 – 321.

⁷⁸ Gödel, K. „What is Cantor’s continuum problem? 1964” u *Kurt Gödel. Collected works. Volume II. Publications 1938 – 1974*. (priređili S. Feferman, J. W. Dawson Jr., S. C. Kleene, G. H. Moore, R. M. Solovay i J. van Heijenoort), Oxford University Press, Oxford 1990, str. 268.

⁷⁹ Adžić, M., *Gödel o aksiomatizaciji teorije skupova*, str. 139 – 140.

Treba naglasiti da

matematička intuicija ne mora biti shvaćena kao sposobnost koja pruža *neposredno* saznanje objekata o kojima je reč. Pre se čini da, kao i u slučaju fizičkog iskustva, mi *formiramo* ideje o tim objektima na osnovu nečeg drugog što nam *jeste* neposredno dato. Samo što ovo nešto drugo *nije*, ili nije primarno, opažaj. Da je pored opažaja nešto drugo zaista dato sledi (nezavisno od matematike) iz činjenice da čak i naše ideje koje se odnose na fizičke objekte sadrže konstituente koji su kvalitativno različiti od opažaja ili pukih kombinacija opažaja, npr., ideja samog objekta (...). Očigledno je da su „datosti” koje podležu matematici usko povezane sa apstraktnim elementima sadržanim u našim empirijskim idejama.⁸⁰

Ukoliko Gedelov, pomalo arhaični, izraz „ideja” zamenimo sa „pojam”, onda bi apstraktni elementi čulnog iskustva uključivali entitete, realne ili ne, koji izdvajaju fizičke objekte kao nosioce svojstava koji su nam prilikom opažanja dati. „Datosti” u oblasti matematike o kojima Gedel govori, sasvim u skladu sa Adžićevom interpretacijom,⁸¹ bismo onda mogli shvatiti kao neke od matematičkih pojmova. Čini se da je pojam skupa najbolji kandidat za nešto što nam je prilikom napredovanja u matematičkom saznanju neposredno dato. Pojam skupa u velikoj meri koristimo prilikom građenja drugih delova matematičkog pojmovnog aparata, te je on utoliko „neposrednije” dat od makog drugog matematičkog pojma.

Pojmovi, prema Gedelovom mišljenju, nisu predmet opažanja nego *razumevanja*.⁸² Stoga, matematička intuicija može biti shvaćena kao razum u posebnoj upotrebi. Naime, to je razum čiji su predmeti matematički pojmovi. Stoga, matematička intuicija kao jedna saznajna sposobnost jeste sporna koliko i samo mišljenje.⁸³

Imajući u vidu da su predmeti matematičke intuicije pojmovi, ne treba da čudi Gedelova ocena „da nam se aksiome nameću kao istinite”. Matematičke istine su, prema Gedelovom mišljenju, analitički iskazi. Tako je dovoljno da *razumemo* značenje reči „skup” kako bismo uvideli da su aksiome teorije skupova istinite.

Napomenimo da kao što često grešimo u našem razumevanju ili prosuđivanju predmeta mišljenja uopšte, tako i matematička intuicija nije imuna na greške. Činjenica da matematička intuicija „može da nas izneveri”, te da neki iskaz prosudi kao istinit, nije argument protiv korisnosti ili posto-

⁸⁰ Gödel, K. „What is Cantor’s continuum problem? 1964”, str. 268.

⁸¹ Adžić, M., *Gedel o aksiomatizaciji teorije skupova*, str. 142 – 153.

⁸² Isto, str. 147.

⁸³ Isto, str. 149.

janja ove sposobnosti, a pogotovu nije argument protiv realnosti predmeta matematičke intuicije. Na primer, aksiome naivne teorije skupova se zaista nameću kao istinite, ukoliko skupove razumemo kao ekstenzije proizvoljnih predikata. Tako su skupovno-teorijski paradoksi, koji su posledice naivnog razumevanja skupa,

često navođeni kao opovrgavanje platonizma, ali, prema mom mišljenju, krajnje neopravdano. Naši vizuelni opažaji ponekad protivreče našim taktilnim opažajima, na primer, u slučaju štapa uronjenog u vodu, ali niko pri čistoj sveći neće iz te činjenice zaključiti da spoljašnji svet ne postoji.⁸⁴

Sve što nam paradoksi teorije skupova govore jeste da nismo razumeli pojam skupa na adekvatan način i ništa više od toga.

Pređimo na pitanje uveravanja u istinitost iskaza matematike. Naše verovanje u istinitost teorema prave matematike pravdamo pozivanjem na istinitost njenih aksioma. Međutim, istinitost aksioma ne možemo opravdati matematički, tj., ne možemo ih dokazati. Ipak, postoje načini da se naše verovanje u aksiome opravda. Ukoliko se u našem opravdanju aksioma pozivamo na pojam skupa, tvrdeći da su aksiome očite samo na temelju toga što razumemo šta znači „biti skup”, onda pružamo *unutrašnje opravdanje* aksioma. Stoga, treba da na neki način *ekspliciramo* ili *razvijemo sadržaj* pojma skupa kako bismo videli da aksiome „slede iz” pojma skupa. U ovom odseku ćemo se posvetiti tom tipu opravdanja.

Za početak, okrenimo se nečemu što Bulos (George Boolos) naziva *naivnim pojmom skupa*.⁸⁵ Ako nam je dato neko svojstvo, za svaki objekat važi da zadovoljava to svojstvo ili da ga ne zadovoljava. Naivno shvatanje skupa podrazumeva da su ovom pukom činjenicom izdvojena dva skupa: skup objekata koji zadovoljava dato svojstvo i skup objekata koji ne zadovoljava to svojstvo. Tako su skupovi shvaćeni kao ekstenzije (unarnih) predikata. Aksiomatizacija zasnovana na ovom pojmu se zove *naivna teorija skupova* (Bolos 1971: 218).⁸⁶ Ona obuhvata aksiomu ekstenzionalnosti i sledeći princip:

Neograničena komprehenzija. *Ako je φ neko svojstvo, onda postoji skup A svih x koji imaju svojstvo φ , odnosno, postoji skup $A = \{x \mid \varphi(x)\}$.*

Nažalost, ova teorija je protivrečna. Na osnovu neograničene komprehenzije, postoji skup $R = \{x \mid x \notin x\}$. Iz toga jednostavno sledi da

⁸⁴ Gödel, K., „Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications”, str. 321.

⁸⁵ Boolos, G., „The Iterative Conception of Set”, *The Journal of Philosophy* br. 68 (8), str. 218.

⁸⁶ Isto.

$$R \in R \text{ akko } R \notin R.$$

Ovaj paradoks se zove *Raselov paradoks*. Stoga, naivni pojam skupa je paradoksalan.

Gedel prihvata *iterativni pojam skupa*:

Ovaj pojam skupa, (...) prema kom je skup sve što se može dobiti od skupa prirodnih brojeva (ili nekih drugih dobro određenih objekata) iterativnom primenom operacije „skup od”, a ne nešto što se može dobiti podelom totaliteta svih postojećih stvari u dve kategorije, nikada nije doveo ni do kakvih antinomija (...).⁸⁷

Dakle, pojam skupa nije naivan, jer skupovi nisu dobijeni „podelom totaliteta svih postojećih stvari u dve kategorije” pomoću nekog svojstva, nego je iterativan, jer su skupovi objekti dobijeni iterativnom primenom operacije „skup od”. Pri tome,

[o]peracija „skup od x -ova” (...) ne može biti definisana na zadovoljavajuć način (...), nego samo parafrazirana korišćenjem drugih izraza koji opet uključuju pojam skupa, poput: „množina x -ova”, „kombinacija ma kog broja x -ova”, „deo totaliteta x -ova”, gde je „množina” („kombinacija”, „deo”) zamišljena kao nešto što postoji nezavisno od toga da li ga možemo definisati konačnim brojem reči (tako da proizvoljni (*random*) skupovi nisu isključeni).⁸⁸

Sa iterativnim pojmom skupa smo se već susreli kada smo govorili o fenomenu neupotpunivosti, ali ćemo mu se sada nešto detaljnije posvetiti. Naše izlaganje Gedelovog opisa iterativnog pojma skupa se zasniva na Gedelovom *Gibbs predavanju*⁸⁹ i Adžićevoju interpretaciji.⁹⁰

Univerzum koji odgovara iterativnom pojmu skupa je podeljen u nivoe i posve liči na fon Nojmanovu kumulativnu hijerarhiju. Nulti nivo hijerarhije je skup prirodnih brojeva ω , a svaki sledeći nivo gradimo od prethodnog iterirajući operaciju „skup od”. Kada smo iterirali operaciju „skup od” za svako $\alpha < \omega$, uzimamo uniju svih prethodnih stadijuma iteracije i nastavljamo dalje. Tako dobijamo prvih nekoliko nivoa:

$$V_0 = \omega, V_1 = P(V_0), V_2 = P(V_1), \dots, V_\omega = \bigcup_{\alpha < \omega} V_\alpha$$

⁸⁷ Gödel, K. „What is Cantor's continuum problem? 1947”, str. 180.

⁸⁸ Gödel, K. „What is Cantor's continuum problem? 1964”, str. 259.

⁸⁹ Gödel, K., „Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications”, str. 306 – 307.

⁹⁰ Adžić, M., *Gedel o aksiomatizaciji teorije skupova*, str. 168 – 184.

Međutim, ovde nije kraj. Ako dobro uredimo, recimo, nivo V_ω , dobijamo dobro uređenje dužine $\aleph_\omega$. Dalje možemo koristiti $\aleph_\omega$ kako bismo indeksirali još nivoa nalik već konstruisanim. Kad indeksiramo sve nivoe kardinalima $\leq \aleph_\omega$, ponavljamo proceduru kao u slučaju sa V_ω . Analogne procedure možemo da sprovodimo sve dalje i dalje. Međutim, ni tu nije kraj. Možemo zahtevati da postoji skup koji zatvoren za svaku od ovih operacija. On dalje može poslužiti kao novi nivo od kojeg možemo da počnemo da sprovodimo analogne procedure izgradnje, *ad infinitum*. Univerzum objekata koji potpadaju pod pojam skupa možemo odrediti ovako:

$$V = \bigcup_{\alpha < ON} V_\alpha$$

Svaki skup je formiran na nekom nivou ove hijerarhije. Međutim, ova hijerarhija je kumulativna, pa ako je x formirano na nivou V_α , onda je formirano i na svakom nivou iznad V_α .

Naivni pojam skupa na poprilično neposredan način pruža unutrašnje opravdanje naivne teorije skupova. Kako bismo ilustrovali način na koji se iterativnim pojmom skupa mogu opravdati aksiome teorije skupova, navešćemo opravdanje aksiome unije.⁹¹ Aksioma unije nam garantuje da za svaku familiju skupova F postoji skup $\bigcup F$ svih elemenata elemenata te familije. (Mesto da govorimo „ x je formirano na nivou V_α “, govorićemo „ x je formirano na nivou α “.) Recimo da je familija F formirana na nivou α . Svaki od elemenata od F je formiran na nekom nivou ispod α -tog nivoa. Pošto je naša hijerarhija kumulativna, postojaće nivo β na kojem će biti formirani svi elementi elemenata od F . Na prvom sledećem nivou, $\beta + 1$, biće formiran skup $\bigcup F$.

Gedelov opis iterativnog pojma skupa ne pruža opravdanje AC ,⁹² budući je AC pretpostavljena prilikom gradnje kardinala koje koristimo kako bismo

⁹¹ Za ostale aksiome teorije $Z - ZFC$ bez instanci sheme zamene i aksiome izbora – videti Boolos, G., „The Iterative Conception of Set“, *The Journal of Philosophy* br. 68 (8) i Maddy, P., „Believing the Axioms. I“, a za sve aksiome teorije ZF , videti Adžić, M., *Gedel o aksiomatizaciji teorije skupova*, str. 183 – 184.

⁹² Čini se da iz neke gedelovske perspektive nije nužno unapred pretpostaviti AC . AC garantuje da za svaku nepraznu familiju F međusobno disjunktih nepraznih supova, postoji skup C koji sadrži po tačno jedan element svakog skupa iz te familije. Pošto nam je ω dato na početku izgradnje, možemo da koristimo taj skup kako bismo indeksirali prve nivoe hijerarhije. Recimo da je na nekom nivou α , koji možemo da izgradimo koristeći se samo ordinalom ω , dana neprazna familija F međusobno disjunktih nepraznih skupova. Kao i u slučaju aksiome unije, svi elementi elemenata od F biće formirani na nivoima manjim od α . Na nivou $\alpha + 1$ će se nalaziti svi podskupovi skupa $\bigcup F$, među kojima će biti skupova koji sadrže po tačno jedan element svakog od skupova iz familije F . Koristeći se ovakvim tipom argumenata, možemo

indeksirali nivoje hijerarhije, kao ni aksiome beskonačnosti, budući nam je ω dato na početku izgradnje. Međutim, unutrašnje opravdanje, zasnovano na analizi pojma skupa, nije jedini tip opravdanja aksioma.

Pogledajmo kako Godel karakteriše *spoljašnje opravdanje*:

čak iako zanemarimo unutrašnju (*intrinsic*) nužnost neke nove aksiome, i čak i u slučaju da uopšte nema unutrašnju nužnost, i na drugi način je moguće proceniti njenu istinitost, naime, induktivno, proučavajući njen „uspeh”, to jest, njenu plodnost u posledicama i posebno njenu plodnost u „proverljivim (*verifiable*)” posledicama. tj., posledicama dokazivim bez nove aksiome, čiji dokazi, međutim, postaju značajno jednostavniji i lakši za otkriti sredstvima nove aksiome, te čine mogućim da se mnogo različitih dokaza sažmu u jedan dokaz.⁹³

Gedel o spoljašnjem opravdanju govori u kontekstu pronalaženja novih aksioma,⁹⁴ no to je sasvim primenljivo i na opravdanje trenutno prihvaćenih aksioma.

Dakle, prema Godelovom mišljenju, aksiome možemo opravdavati pozivajući se na njihove posledice. Te posledice se ne moraju ticati samo novih teorema koje možemo dokazati, nego i posledica po pitanju matematičke prakse, u tom smislu što nam neka aksioma omogućuje lakše ili elegantnije dokaze ranije dokazanih tvrđenja.

Aksioma izbora, koja je ranije „ostala bez opravdanja”, lep je primer aksiome koju možemo da opravdamo pozivanjem na posledice u vidu tvrđenja koja ne možemo dokazati bez te aksiome. Cermelova teorema, Hausdorfov princip maksimalnosti, Cornova lema, Tihonovljeva teorema i teorema potpunosti su samo neke od važnijih takvih tvrđenja. Jedna situacija koju je opisao Mur (Gregory H. Moore), a koju takođe navodi Medijeva (Penelope Maddy),⁹⁵ lepo može da ilustruje da su članovi matematičke zajednice bar implicitno skloni da na ovaj način opravdavaju temeljne principe svoje nauke. Van der Verden (Bartel Leendert van der Waerden) je 1930. godine objavio *Moderne Algebra*. To je jedna veoma uticajna knjiga koja detaljno ispituje nove posledice *AC* u polju apstraktne algebre. Drugo izdanje, iz 1937. godine, doživelo je radikalnu izmenu sadržaja. Van der Vardenove kolege su ga ubedile da napusti aksiomu izbora, što je rezultiralo nekakvom

da opravdamo nekakva ograničenja *AC*, pa ih potom koristiti kako bismo dobro uredili nivoje ispod nivoa koji smo koristili za opravdanje. U suštini, trebalo bi da u procesu iteracije opravdamo aksiomu izbora, što nam pruža osnov za dalje iteriranje.

⁹³ Gödel, K. „What is Cantor’s continuum problem? 1947”, str. 182.

⁹⁴ Temom pronalaženja novih aksioma i njihovog opravdanja, bilo unutrašnjeg, bilo spoljašnjeg, bavićemo se u drugom radu koji je pomenut u Uvodu i najavljen u Zaključku ovog rada.

⁹⁵ Maddy, P., „Believing the Axioms. I”, str. 488.

osiromašenom verzijom apstraktne algebre. Ovo je za posledicu imalo veliko nezadovoljstvo unutar zajednice algebrista, zbog čega se u trećem izdanju van der Varden vratio aksiomi izbora.

Prema Cermelovom mišljenju, koji je AC eksplicitno formulisao kako bi izdvojio principe koje je koristio u dokazu teoreme o dobrom uređenju, aksioma izbora je prosto *nužna za nauku*.⁹⁶ Pitanje unutrašnje plauzibilnosti temeljnih pretpostavki naše nauke je donekle subjektivno, prema njegovom mišljenju. Međutim, pitanje spoljašnjeg opravdanja može biti objektivno odlučeno. Dovoljno je da se zapitamo da li je princip nužan za napredovanje u nauci. Čini se da su do sada navedeni primeri dovoljni da shvatimo da AC to jeste.

Što se tiče „proverljivih” posledica neke aksiome, razmotrimo sledeći primer. Umesto da govorimo o nekoj pojedinačnoj aksiomi, govorićemo o nekom konačnom skupu aksioma teorije ZFC koji je dovoljan da se izgradi realnih brojeva i pokaže da realnih brojeva ima više od algebarskih. Kantorovim dijagonalnim argumentom se veoma jednostavno može pokazati da realnih brojeva zaista ima više nego algebarskih. No, primetimo da je ovo istovremeno dokaz da postoje transcendentni brojevi. Tako ovaj konačan skup aksioma možemo opravdati pozivajući se na činjenicu da on daleko jednostavnije i elegantnije dokazuje postojanje transcendentnih brojeva u odnosu na Ljivilov dokaz. Takođe, isti taj aparat nam može dati i proceduru za konstrukciju transcendentnih brojeva, ponovo jednostavniju od ranije poznatih.

Da li postoji neki odnos primarnosti između ovih tipova opravdanja? Prema Godelovom mišljenju, ne. Videli smo da se istinitost aksiome može proceniti na temelju njenih posledica, „čak i u slučaju da uopšte nema unutrašnju nužnost”.⁹⁷ Štaviše,

[m]ožda postoje aksiome tako obilne u njihovim proverljivim posledicama, koje obasjavaju svetlom celu jednu disciplinu, te pružaju tako snažne metode za rešavanje datih problema (...) da bi *potpuno nezavisno od njihove unutrašnje nužnosti morale biti pretpostavljene* bar u istom smislu ka neka dobro ustanovljena fizička teorija.⁹⁸ [kurziv Đ. V.)

Pokušaćemo da rekonstruišemo način na koji se, gledano iz Godelove perspektive, može opisati odnos unutrašnjeg i spoljašnjeg opravdanja.

Naivna teorija skupa, zasnovana na naivnom pojmu skupa, ima veoma visok stepen unutrašnje plauzibilnosti. Zaista, čini se krajnje očitim za tvrditi

⁹⁶ Isto, str. 487 – 488.

⁹⁷ Gödel, K. „What is Cantor’s continuum problem? 1947”, str. 182.

⁹⁸ Isto, str. 182 – 183.

da svako svojstvo određuje skup svih stvari koje to svojstvo imaju. Međutim, nasuprot ovoj unutrašnjoj plauzibilnosti, ova teorija je protivrečna. Razlozi koji su Cermela vodili prilikom formulisanja teorije *ZC* su, pre svega, bili motivisani željom da se preciziraju principi korišćeni u dokazu teoreme o dobrom uređenju.⁹⁹ To ne znači da za neke ili sve od aksioma nije bilo dato, a pogotovu da nije moglo biti dato, unutrašnje opravdanje. Iterativni aspekt pojma skupa je prvi sagledao Cermelo,¹⁰⁰ a on nije bio sagledan bez sagledavanja posledica teorije *ZFC*. Naravno, može se prigovoriti da razumevanje iterativnog aspekta pojma skupa javlja i pre *ZFC*, pa i pre pažljivog proučavanja njenih posledica. Međutim, kad god da je začeta ideja iterativnog pojma skupa, ta ideja tada nije bila jasna onoliko koliko danas jeste, niti je danas jasna koliko u budućnosti može biti. Sve to dugujemo činjenici da aksiome nisu opravdane samo na temelju njihove unutrašnje plauzibilnosti, nego i na temelju posledica koje omogućavaju bolje razumevanje pojma skupa i, samim tim, uvećavaju ili smanjuju unutrašnju plauzibilnost aksioma.

Međutim, ukoliko bismo se zadržali samo na spoljašnjem opravdanju naših aksioma, svaki sistem bi morao ostati hipotetičko-deduktivni sistem. Postoji određen stepen proizvoljnosti u vezi sa spoljašnjim opravdanjem, utoliko što se radi o odabiru aksioma koje imaju *željene* posledice (bilo da su to nove teoreme ili proverljive teoreme). Ukoliko odbacimo unutrašnje opravdanje aksioma, sigurno nećemo matematičkom intuicijom moći da procenjujemo to koje su posledice željene. Međutim, prisetimo se da moraju postojati neke *istinite* i *bez dokaza očigledne* aksiome kako bi uopšte bilo hipotetičko-deduktivnih sistema. Stoga, čini se da spoljašnje opravdanje nije dovoljno. No isto tako, čini se da nije ni unutrašnje.

ZAKLJUČAK

Osnovni rezultati ovog rada se mogu sumirati na sledeći način. Godel je platonista, odnosno smatra da matematički iskazi opisuju od uma nezavisno postojeću stvarnost koju čine objekti poput brojeva i skupova, te da matematičari u svojim istraživanjima *otkrivaju* istine o toj stvarnosti. Ne samo to, nego je on i pojmovni realista, te smatra da matematički pojmovi, poput pojma skupa, ima realnu, od uma nezavisnu egzistenciju. Ovakva pozicija Godelu omogućava da tvrdi da postoji odgovor na Kantorov problem kontinuuma, uprkos njegovim i Koenovim rezultatima o nezavisnosti hipoteze kontinu-

⁹⁹ Maddy, P., „Believing the Axioms. I”, str. 483.

¹⁰⁰ Isto, str. 485.

ma. Ta hipoteza je istinita ili lažna u strukturi koju *ZFC* pretenduje da opiše. To što je *ZFC* ne odlučuje samo znači da *ZFC* ne pruža dovoljno bogat opis univerzuma skupova. Kažemo: „dovoljno bogat” jer nijedna teorija nikada ne može pružiti *potpun* opis, budući da je matematika neupotpunjiva. Međutim, *ZFC* se može proširiti novim aksiomima koji rešavaju probleme stare teorije. Opravdanje novih aksioma ne može biti matematičko, jer ih ne dokazujemo matematički. Međutim, ipak možemo pružiti neke vidove opravdanja, od kojih Gedel razlikuje unutrašnje i spoljašnje opravdanje, pri čemu ni jedno ni drugo samo po sebi nije dovoljno za celovito opravdanje novih aksioma.

U narednom radu posvećenom ovoj temi ćemo se baviti predstavljanjem nekih Gedelovih predloga za pristup rešavanju Kantorovog problema kontinuumu.

LITERATURA

- Adžić, M., *Gedel o aksiomatizaciji teorije skupova*, Doktorska disertacija, Beograd 2004.
- Barker, S., *Filozofija matematike*, Nolit, Beograd 1973.
- Boolos, G., „The Iterative Conception of Set”, *The Journal of Philosophy* br. 68 (8).
- Brouwer, L. E. J., „Intuitionism and formalism” u *Philosophy of mathematics: Selected readings* (priredili P. Benacerraf i H. Putnam.), Cambridge University Press, Cambridge 1983.
- Brouwer, L. E. J., „Consciousness, philosophy, and mathematics” u *Philosophy of mathematics: Selected readings* (priredili P. Benacerraf i H. Putnam.), Cambridge University Press, Cambridge 1983.
- Frege, G., „O smislu i nominatumu” u *Ogledi o jeziku i značenju* (priredili A. Pavković i Ž. Lazović), Filozofsko društvo Srbije, Beograd 1992.
- Frege, G., „Osnove aritmetike: Logičko-matematičko istraživanje pojma broja” u *Osnove aritmetike i drugi spisi* (priredili F. Grgić i M. Hudoletnjak Grgić), Kruzak, Zagreb 1995.
- Frege, G., „Funkcija i pojam” u *Osnove aritmetike i drugi spisi* (priredili F. Grgić i M. Hudoletnjak Grgić), Kruzak, Zagreb 1995.
- Gödel, K., „Russell's mathematical logic” u *Kurt Gödel. Collected works. Volume II. Publications 1938 – 1974.* (priredili S. Feferman, J. W. Dawson Jr., S. C. Kleene, G. H. Moore, R. M. Solovay i J. van Heijenoort), Oxford University Press, Oxford 1990.
- Gödel, K., „What is Cantor's continuum problem? 1947” u *Kurt Gödel. Collected works. Volume II. Publications 1938 – 1974.* (priredili S. Feferman, J. W. Dawson Jr., S. C. Kleene, G. H. Moore, R. M. Solovay i J. van Heijenoort), Oxford University Press, Oxford 1990.
- Gödel, K., „What is Cantor's continuum problem? 1964” u *Kurt Gödel. Collected works. Volume II. Publications 1938 – 1974.* (priredili S. Feferman, J. W. Dawson Jr., S. C. Kleene, G. H. Moore, R. M. Solovay i J. van Heijenoort), Oxford University Press, Oxford 1990.

- Gödel, K., „Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications” u *Kurt Gödel. Collected works. Volume III. Unpublished Essays and Lectures*. (priređili S. Feferman, J. W. Dawson Jr., W. Goldfarb, C. Parsons i R. Solovay), Oxford University Press, Oxford 1995.
- Hilbert, D., „On the Infinite” u *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879 – 1931* (priređio J. van Heijenoort), Harvard University Press, Massachusetts 1967.
- Linnebo, Ø., *Philosophy of Mathematics*, Princeton University Press, Princeton 2017.
- Maddy, P., „Believing the Axioms. I”, *The Journal of Symbolic Logic*, br. 53 (2).
- Mijajlović, Ž., Marković, Z. i Došen, K., *Hilbertovi problemi i logika*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 1986.
- Quine, W. V. O., *Philosophy of Logic*, Harvard University Press, Cambridge 1986.
- Russell, B. *Principles of Mathematics*, Routledge, London 2010.
- Wang, H., „The concept of set” u *Philosophy of mathematics: Selected readings* (priređili P. Benacerraf i H. Putnam.), Cambridge University Press, Cambridge 1983.
- Horsten, L., „Philosophy of Mathematics”, <https://plato.stanford.edu/archives/win2023/entries/philosophy-mathematics/> 10.10.2024.

DORĐE VUKAŠINOVIĆ

University of Belgrade, Faculty of Philosophy

GÖDEL ON CANTOR'S CONTINUUM PROBLEM I:
GÖDEL'S PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

Abstract: *Cantor's continuum problem* is the question: How many points are there on a line in Euclidean space? Cantor (Georg Cantor) believed that the number of points on a line, i.e. the cardinality of the continuum, is the first infinite cardinal that comes after the cardinality of the set of natural numbers. This is a rough formulation of Cantor's continuum hypothesis. Cantor repeatedly tried to prove the continuum hypothesis during his career. However, his efforts did not bear fruit. At the beginning of the 20th century, set theory was formulated as an axiomatic theory. That axiomatic theory is called *Zermelo-Frenkel set theory with axiom of choice*, i.e., *ZFC* set theory. Based on the results of Kurt Gödel and Paul Cohen, we know that the *ZFC* theory neither proves nor disproves Cantor's hypothesis, leaving Cantor's continuum problem unsolved. However, according to Gödel, Cantor's continuum problem can be solved by extending *ZFC* set theory with new axioms that will give us a more complete insight into the structure of the universe of sets. This paper is the first in a series of two papers in which we aim to present some of Gödel's proposals for an approach to solving Cantor's continuum problem, as well as Gödel's Platonist philosophical position underlying those proposals. This paper is focused on presenting Gödel's philosophy of mathematics. To that end, we will first present representative positions in the philosophy of mathematics and their main representatives. Then we will explain what Hilbert's program is and what, according to Gödel, are the consequences of impossibility of its implementation. Then we deal with the ontological and finally the epistemological aspect of Gödel's Platonism.

Keywords: Gödel, Platonism, set theory, the continuum hypothesis

Primljeno: 1.3.2025.

Prihvaćeno: 8.5.2025.