

DORĐE VUKAŠINOVIĆ¹

Univerzitet u Beogradu, Filozofski fakultet

GEDEL O KANTOROVOM PROBLEMU KONTINUUMA II: KANTOROV PROBLEM KONTINUUMA²

Sažetak: *Kantorov problem kontinuuma* je pitanje: Koliko tačaka ima na pravoj u Euklidskom prostoru? Kantor (Georg Cantor) je verovao da je broj tačaka na pravoj, tj. *kardinalnost kontinuuma*, prvi beskonačni kardinal koji dolazi posle kardinalnosti skupa prirodnih brojeva. To je gruba formulacija Kantorove hipoteze kontinuuma. Kantor je u više navrata tokom svoje karijere pokušavao da dokaže hipotezu kontinuuma. Međutim, njegov napor nije urodio plodom. Početkom XX veka, teorija skupova biva formulisana kao aksiomatska teorija. Ta aksiomatska teorija se zove *Cermelo-Frenkelova teorija skupova sa aksiomom izbora*, tj., *ZFC* teorija skupova. Na osnovu rezultata Gedela (Kurt Gödel) i Koena (Paul Cohen), znamo da teorija *ZFC* niti dokazuje, niti opovrgava Kantorovu hipotezu, te Kantorov problem kontinuuma ostavlja nerešenim. Međutim, prema Gedelovom mišljenju, Kantorov problem kontinuuma se može rešiti proširivanjem teorije skupova *ZFC* novim aksiomama koje će nam dati celovitiji uvid u strukturu univerzuma skupova. Ovaj rad je drugi u nizu od dva rada u kojima nam je cilj da predstavimo neke od Gedelovih predloga za pristup rešavanju Kantorovog problema kontinuuma, kao i Gedelovu platonističku filozofsku poziciju koja stoji u osnovi tih predloga. U ovom radu nam je cilj da predstavimo Gedelove predloge za nove aksiome i njihove posledice, zajedno sa opravdanjem koje se u prilog tih principa može ponuditi. Prvo ćemo predstaviti Gedelove reakcije na stanovišta prema kojima je Kantorov problem kontinuuma rešen dokazom nezavisnosti *CH*. Potom ćemo razmotriti Gedelovo mišljenje o istinitosti *CH*. Zatim ćemo navesti neke od jakih aksioma beskonačnosti i njihove posledice po Kantorov problem. Na kraju ćemo razmotriti aksiomu konstruktibilnosti kao kandidata za novu aksiomu.

Ključne reči: Gedel, platonizam, teorija skupova, hipoteza kontinuuma

¹ E-mail adresa autora: dj.vukasinovic@stud.f.bg.ac.rs

² Ovaj rad sadrži treći deo autorovog završnog rada pod nazivom *Gedel o Kantorovom problemu kontinuuma* koji je odbranjen na Univerzitetu u Beogradu – Filozofskom fakultetu septembra meseca 2021. godine.

UVOD

Ovaj rad je drugi u nizu od dva rada u kojima nam je cilj da predstavimo neke od Gedelovih (Kurt Gödel) predloga za pristup rešavanju Kantorovog problema kontinuuma, kao i Gedelovu platonističku filozofsku poziciju koja stoji u osnovi tih predloga. U prethodnom radu smo videli da je Gedel platonista, odnosno smatra da matematički iskazi opisuju od uma nezavisno postojeću stvarnost koju čine objekti poput brojeva i skupova, te da matematičari u svojim istraživanjima *otkrivaju* istine o toj stvarnosti. Ne samo to, nego je on i pojmovni realista, te smatra da matematički pojmovi, poput pojma skupa, ima realnu, od uma nezavisnu egzistenciju. Ovakva pozicija Gedelu omogućava da tvrdi da postoji odgovor na Kantorov problem kontinuuma,³ uprkos njegovim i Koenovim rezultatima o nezavisnosti hipoteze kontinuuma. Ta hipoteza je istinita ili lažna u strukturi koju *ZFC* pretenduje da opiše. To što je *ZFC* ne odlučuje samo znači da *ZFC* ne pruža dovoljno bogat opis univerzuma skupova. Kažemo: „dovoljno bogat” jer nijedna teorija nikada ne može pružiti *potpun* opis, budući da je matematika neupotpunjiva. Međutim, *ZFC* se može proširiti novim aksiomima koji rešavaju probleme stare teorije i daju bolji uvid u strukturu univerzuma skupova. Opravdanje novih aksioma ne može biti matematičko, jer ih ne dokazujemo matematički. Međutim, ipak možemo pružiti neke vidove opravdanja, od kojih Gedel razlikuje unutrašnje i spoljašnje opravdanje, pri čemu ni jedno ni drugo samo po sebi nije dovoljno za celovito opravdanje novih aksioma. Unutrašnje opravdanje se zasniva na analizi pojma skupa koja neposredno čini jasnim istinitost principa koje pokušavamo da opravdamo. Gedel smatra da je pojam skupa iterativan, odnosno da su skupovi rezultat transfinitne iteracije operacije „skup od” – neodređene operacije koja od skupova pravi nove skupove. Sa druge strane, spoljašnje opravdanje se temelji na pragmatičnim posledicama koje prihvatanje principa sa sobom povlači. Što su posledice „bolje”, to je princip prihvatljiviji.

³ Podsetimo se, *Kantorov problem kontinuuma* je pitanje: Koliko tačaka ima na pravoj u euklidskom prostoru? Kantor (Georg Cantor) je verovao da je broj tačaka na pravoj, tj. *kardinalnost kontinuuma*, prvi beskonačni kardinal koji dolazi posle kardinalnosti skupa prirodnih brojeva. To je gruba formulacija Kantorove hipoteze kontinuuma. Kantor je u više navrata tokom svoje karijere pokušavao da dokaže hipotezu kontinuuma. Međutim, njegov napor nije urodio plodom. Početkom XX veka, teorija skupova biva formulisana kao aksiomska teorija. Ta aksiomska teorija se zove *Cermelo-Frenkelova teorija skupova sa aksiomom izbora*, tj., *ZFC* teorija skupova. Na osnovu rezultata Gedela i Koena (Paul Cohen), znamo da teorija *ZFC* niti dokazuje, niti opovrgava Kantorovu hipotezu, te Kantorov problem kontinuuma ostavlja nerešenim.

Pošto je matematika neupotpunjiva, kako smo u prethodnom radu videli, ne možemo se nadati da ćemo ikada formulisati teoriju koja će opisivati celokupnu matematičku stvarnost. Međutim, možemo se nadati da ćemo pronaći aksiome koje će nam dati nešto potpuniji opis određenih segmenata te stvarnosti. Recimo, možda možemo naći aksiome koje će nam, zajedno sa trenutno prihvaćenim aksiomama teorije skupova, dati odgovor na pitanje o poziciji kardinalnosti kontinuuma u hijerarhiji beskonačnih kardinala. Prema Gedelovom mišljenju, put ka rešenju Kantorovog problema kontinuuma jeste put formulisanja i opravdavanja novih aksioma teorije skupova. Specifično, jakih aksioma beskonačnosti.

U ovom delu rada cilj nam je da predstavimo Gedelove predloge za nove aksiome i njihove posledice, zajedno sa opravdanjem koje se u prilog tih principa može ponuditi. U prvom delu ćemo predstaviti Gedelove reakcije na stanovišta prema kojima je Kantorov problem kontinuuma rešen dokazom nezavisnosti *CH*. Potom ćemo razmotriti Gedelovo mišljenje o istinitosti *CH*. Pošto je Gödel, bar u drugoj polovini svoje karijere, bio uveren u to da je *CH* lažno, to nam može pomoći da razumemo koje bi aksiome, prema Gedelovom mišljenju, bile adekvatni kandidati za zadovoljavajuće rešenje Kantorovog problema. U trećem delu ovog rada ćemo navesti neke od jakih aksioma beskonačnosti i njihove posledice po Kantorov problem kontinuuma. Na kraju ćemo razmotriti aksiomu konstruktibilnosti kao kandidata za novu aksiomu.

DA LI JE KANTOROV PROBLEM KONTINUUMA PROBLEM?

Prema Gedelovom mišljenju, Kantorov problem kontinuuma nije rešen činjenicom da je *CH* nezavisno od *ZFC*:

Samo neko ko (kao intuicionisti) odriče da pojmovi i aksiome klasične teorije skupova imaju bilo kakvo značenje (ili bilo kakvo dobro određeno značenje) može biti zadovoljan takvim rešenjem, a ne neko ko veruje da oni opisuju neku dobro određenu stvarnost. Jer u ovoj stvarnosti Kantorova pretpostavka [hipoteza kontinuuma – prim. prev.] mora biti istinita ili lažna, a njena neodlučivost danas poznatim aksiomama samo znači da ove aksiome ne sadrže potpun opis ove stvarnosti (...).^{4 5}

⁴ Gödel, K. „What is Cantor’s continuum problem? 1947”, str. 181.

⁵ Kada je ovo pisao, nezavisnost *CH* još uvek nije bila ustanovljena. Međutim, Gödel je već 1947. godine, a možda i ranije, sumnjao da *ZFC* može da odluči *CH*. Kao što je jasno, bio je u pravu. Ovi redovi iz obe verzije Gedelovog rada o Kantorovom problemu kontinuuma su

Odbrana ovog Godelovog stava je data Godelovom odbranom platonizma koju smo predstavili u prvom radu koji je pomenut u Uvodu. Dalje ćemo tu odbranu dopuniti još nekim Godelovim argumentima koji su u vezi sa reakcijama na pozicije prema kojima je Kantorov problem kontinuuma rešen ili, eventualno, nikada nije ni postojao.

Na prvom mestu, Godel objašnjava da je Brauerov intuicionizam „potpuno destruktivan u njegovim posledicama” po analizu pojma skupa, pa i samu teoriju skupova. Teorija neprebrojivih beskonačnih kardinala „odbačena je kao besmislena”.⁶ U izvesnom smislu, prema mišljenju intuicionista, Kantorov problem kontinuuma nikada nije ni postojao. Pre se problem sastoji u tome što su neki matematičari spremni da prihvate neodržive principe koji rezultiraju problemima poput Kantorovog problema kontinuuma. Odbacivanje takvih principa, koje je prema mišljenju intuicionista nužno, rezultira obesmišljavanjem Kantorovog problema.

Razlog protiv ovakvog stava intuicionista je u vezi sa posledicama postojanja nekih velikih skupova po elementarnu teoriju brojeva. Naime, iskazi o višim nivoima hijerarhije podrazumevane iterativnim pojmom skupa imaju posledice po istinitost iskaza nultog nivoa hijerarhije, odnosno, po istinitost iskaza elementarne teorije brojeva. Utoliko što konstruktivisti prihvataju postojanje objekata nultog nivoa hijerarhije, iskazi viših nivoa hijerarhije moraju biti uzeti kao smisleni bar u tom smislu što neki među ovim iskazima povlače rešenje određenih problema teorije brojeva. CH i $\neg CH$ nemaju posledice po teoriju brojeva.^{7 8} Međutim, iskazi koji možda mogu da ih odluče, poput jakih aksioma beskonačnosti, svakako imaju.

Na drugom mestu,

[p]uka psihološka činjenica o postojanju intuicije koja je dovoljno jasna da proizvede aksiome teorije skupova i otvoren niz proširenja tih aksioma dovoljno

napisani pod pretpostavkom da je njegova ocena o tome da su sredstva *ZFC* nedovoljna da reše Kantorov problem ispravna.

⁶ Gödel, K. „What is Cantor’s continuum problem? 1964”, str. 257.

⁷ Moore, G. H., „Introductory note to 1947 and 1964” u *Kurt Gödel. Collected works. Volume II. Publications 1938 – 1974.* (priredili S. Feferman, J. W. Dawson Jr., S. C. Kleene, G. H. Moore, R. M. Solovay i J. van Heijenoort), Oxford University Press, Oxford 1990, str. 169.

⁸ U vreme pisanja druge verzije rada o Kantorovom problemu kontinuuma, Godelu nije bilo poznato da je $\neg CH$ takođe „sterilna” po teoriju brojeva, budući je to tek kasnije dokazano. To škodi nekim od Godelovih argumenata, ali ne supstancijalno. Pre svega argumentima u vezi sa kritikom analogije između geometrije i teorije skupova (Gödel, K. „What is Cantor’s continuum problem? 1964”, str. 267), čiji je deo izložen dole.

je da da značenje pitanju o istinitosti ili lažnosti iskaza kao što je Kantorova hipoteza kontinuuma.⁹

Pri tome, ovde nije važno da li nam ta intuicija pruža razumevanje pojmova koji postoje nezavisno od naših definicija i konstrukcija ili ne, dovoljno je da mi te pojmove razumemo, te da na temelju tog razumevanja možemo da formulišemo aksiome teorije skupova. Reći kao što su „istina” ili „skup”, ovde čak mogu biti uzeti kao *façon de parler*.

Na kraju, kao posledicu formalističkog shvatanja matematike, uz nezavisnost CH , imamo da su teorije $ZFC + CH$ i $ZFC + \neg CH$ jednako prihvatljive.¹⁰ Ovaj problem grananja može biti postavljen i nezavisno od formalizma, povlačenjem analogije između teorije skupova i geometrije. Budući je Plejferova aksioma paralelnosti nezavisna od apsolutne geometrije, i ona i njena negacija mogu poslužiti, kao što i služe, kao aksiome u dva različita sistema geometrije – euklidska geometrija i geometrija Lobačevskog. Ukoliko je situacija u teoriji skupova slična situaciji u geometriji, pitanje istinitosti ili lažnosti CH je deplasirano. Međutim, Gödel smatra da se situacije razlikuju.¹¹ Teorija skupova, za razliku od sistema geometrije, nije hipotetičko-deduktivni sistem, jer aksiome teorije skupova ne mogu biti proizvoljne. Međutim, u slučaju hipotetičko-deduktivnog sistema, kakav je euklidska geometrija, pitanje istinitosti nezavisnog tvrđenja *može* zadržati smisao *ukoliko* pridamo primitivnim pojmovima tog sistema neko dobro određeno značenje. Na primer, ako aksiome euklidske geometrije shvatimo kao tvrđenja o krutim telima, svetlosnim talasima i drugim fizičkim objektima, onda je pitanje istinitosti Plejferove aksiome sasvim smisleno. Situacija u teoriji skupova je donekle slična poslednjem primeru. Razlika se sastoji u tome što značenja primitivnih termina geometrije vezujemo za fiziku, dok predmeti transfinitne teorije skupova nisu predmeti iskustva ili bar objekti koji imaju posledice po predmete iskustva kojima se fizika bavi.

⁹ Gödel, K. „What is Cantor’s continuum problem? 1964”, str. 268.

¹⁰ Neki formalisti, poput Koena, nisu spremni da obe teorije uzmu kao prihvatljive, zbog njihovih posledica po elementarnu teoriju brojeva (Maddy, P., „Believing the Axioms. I”, str. 498). Tačnije, zbog posledica teorije $ZFC + \varphi$, gde je φ neka nova aksioma koja odlučuje CH i koja ima posledice po elementarnu teoriju brojeva, za razliku od CH ili $\neg CH$ koje nemaju. (Čini se da ovaj Koenov formalizam naginje ka Hilbertovom formalizmu.)

¹¹ Isto, str. 267.

HIPOTEZA KONTINUUMA

U ovom odeljku ćemo razmotriti Gedelovu kritiku *CH*. Kritika *CH* je i kritika aksioma koje za posledicu imaju *CH*, kao što je i navođenje argumenta u prilog $\neg CH$ argument u prilog plauzibilnosti aksioma koje povlače $\neg CH$. Ovo će nam pomoći da vidimo koje aksiome, prema Gedelovom mišljenju, mogu da posluže u svrhe zadovoljavajućeg rešenja Kantorovog problema.

Može se ponuditi spoljašnje opravdanje koje favorizuje *CH* u odnosu na njenu negaciju:

Uopštena *CH* je veoma jednostavna i snažna pretpostavka koja trenutno rešava sva pitanja kardinalne aritmetike. (...) U knjizi *Hypothese de Continu* Sierpiński [Wacław Franciszek Sierpiński – prim. prev.] je dedukovao 82 iskaza iz *CH*. Nasuprot tome, Martin [D. A. Martin – prim. prev.] i Solovej [Robert M. Solovay – prim. prev.] su primetili (...) da ni za jedan od ta 82 iskaza nije poznato da li su odlučeni negacijom hipoteze kontinuuma.¹²

Međutim, Gedel smatra da su neke posledice *CH* „paradoksalne”, navodeći niz takvih posledica.¹³ Na primer, jedna od posledica *CH* koju Gedel smatra kontraintuitivnom, a koju razmatra i Medijeva (Penelope Maddy),¹⁴ jeste ova. Kantorov skup, kao i ostali savršeni skupovi, nije skup jake mere nula. Borel (Émile Borel), koji je uveo pojam skupa jake mere nula, pretpostavljao je da nijedan skup kardinalnosti kontinuuma nije skup jake mere nula. Međutim, *CH* povlači, suprotno Borelovim i Gedelovim intuicijama, da postoji takav skup. Prema Medijevoj, problem se možda sastoji u tome što je nejasno kako skupovi relativno velike kardinalnosti mogu imati malu meru.

Pošto je naveo nekoliko ovakvih kontraintuitivnih posledica *CH* Gedel predviđa jedan prigovor.

Može se reći da puno rezultata opšte topologije koji su dobijeni mimo korišćenja hipoteze kontinuuma takođe jesu veoma neočekivani i neplauzibilni. Međutim, koliko god to bilo tačno, situacija se ipak razlikuje po tome što, u najvećem broju slučajeva (kao što su, npr., Peanove krive), privid suprotstavljenosti [intuicije i rezultata opšte topologije – prim. prev.] može biti objašnjen nedostatkom slaganja između naših intuitivnih geometrijskih i skupovno-teorijskih pojmova koji se javljaju u datim teoremama.¹⁵

¹² Maddy, P., „Believing the Axioms. I”, str. 495.

¹³ Gödel, K. „What is Cantor’s continuum problem? 1964”, str. 263 – 264.

¹⁴ Maddy, P., „Believing the Axioms. I”, str. 495 – 496.

¹⁵ Gödel, K. „What is Cantor’s continuum problem? 1964”, str. 264.

Primer Peanove krive, koje Godel pominje, bila bi slika neprekidne funkcije iz jediničnog intervala u jedinični kvadrat koja sadrži svaku tačku tog kvadrata. Postojanjem takve funkcije bi bilo dokazano da jedinični kvadrat može biti konstruisan kao kriva. Isto tako, postoje funkcije koje elemente jediničnog intervala preslikavaju u proizvoljne n -dimenzionalne jedinične kocke.

Pošto su izneli sadržaj prethodnog Godelovog citata, i Medijeve¹⁶ i Mur (G. H. Moore)¹⁷ navode sledeće Martinove (Donald A. Martin) reči:

Iako Godelove intuicije nikada ne treba uzimati olako, veoma je teško videti da ova situacija *jeste* različita od situacije sa Peanovim krivama, a čak je nekima od nas teško da vidimo zašto su primeri koje Godel navodi uopšte neplauzibilni.¹⁸

Ponudićemo jedno objašnjenje Godelove karakterizacije nekih posledica CH kao neplauzibilnih koje, doduše, ipak deluje sumnjivo. Pošto kontraintuitivnost razmatrane posledice CH ne dolazi od sukoba sa geometrijskom intuicijom, čini se da je reč o sukobu sa intuicijom (tj. razumevanjem) pojma skupa. Kao što ćemo videti uskoro, Godel je verovao da je aksioma konstruktibilnosti¹⁹ previše restriktivna, utoliko što tvrdi „minimalno svojstvo”, te da jedino „maksimalno svojstvo” može biti usklađeno sa iterativnim pojmom skupa. Negacije posledica CH za koje Godel kaže da su kontraintuitivne, za posledicu imaju $\neg CH$, pa, samim tim, i $V \neq L$. Tako su negacije posledica plauzibilne budući da se možda slažu sa aksiomom koja je dijametralno suprotna $V = L$, a koja bi bila u skladu sa iterativnim pojmom skupa. Samim tim, posledice CH nisu plauzibilne.²⁰

¹⁶ Maddy, P., „Believing the Axioms. I”, str. 496.

¹⁷ Moore, G. H., „Introductory note to 1947 and 1964” str. 165.

¹⁸ Citirano prema: Maddy, P., „Believing the Axioms. I”, str. 496.

¹⁹ Aksioma konstruktibilnosti tvrdi da je svaki skup konstruktibilan. To znači da je svaki skup element *konstruktibilne hijerarhije* koju gradimo na sledeći način. Polazimo od praznog skupa i nivoa hijerarhije indeksiramo ordinalima. Ako je nivo indeksiran ordinalom sledbenikom, onda je taj nivo sačinjen od svih podskupova prethodnog nivoa hijerarhije koje možemo da definišemo pominjući samo objekte sa tog, prethodnog nivoa hijerarhije. Ako je nivo indeksiran graničnim ordinalom, onda taj nivo sadrži skupove iz svih nižih nivoa. Klasu svih skupova koji su dobiveni na ovakav način obeležavamo sa L – to je Godelov konstruktibilni univerzum kojim se služio da dokaže konzistentnost CH . Aksiomu konstruktibilnosti obeležavamo i ovako: $V = L$, budući da ona tvrdi da je univerzum skupova V baš konstruktibilni univerzum L .

²⁰ Primitimo da ovakvo objašnjenje ni u kojem slučaju ne opravdava Godelovo tvrđenje da su te posledice CH „paradoksalne”, nego samo da nisu plauzibilne.

JAKE AKSIOME BESKONAČNOSTI

Aksiome velikih kardinala ili *jake aksiome beskonačnosti* su principi koji garantuju postojanje nekih veoma velikih skupova, čija je egzistencija nedokaziva sredstvima *ZFC*. Ukoliko neke od tih aksioma dodamo teoriji *ZFC*, možda ćemo dobiti jaču teoriju koja može da reši Kantorov problem kontinuuma.

U ovom odeljku ćemo predstaviti neke aksiome koje tvrde postojanje velikih kardinala, njihovo opravdanje i njihove posledice po Kantorov problem kontinuuma. Ograničićemo se na aksiome koje tvrde postojanje nedostiživih, Maloovih i merljivih kardinala, budući da Gedel te principe pominje u drugoj verziji rada o Kantorovom problemu kontinuuma. Prvo ćemo uvesti princip refleksije, a to je princip koji nam može pomoći u opravdanju aksioma velikih kardinala. Potom ćemo se baviti aksiomama koje tvrde postojanje nedostiživih i Maloovih kardinala. Na kraju, razmatramo aksiomu koja tvrdi postojanje merljivog kardinala.

Princip refleksije tvrdi da je univerzum teorije skupova toliko velik da se ne može opisati sredstvima ma koje naše teorije.²¹ On je prirodna posledica iterativnog pojma skupa, kako smo ga ranije okarakterisali. Ako smo i pomislili da smo stigavši do nekog nivoa V_α (za koji u tom trenutku mislimo da je upravo V), zajedno sa aksiomama koje se odnose na taj nivo i koje nam garantuju da je taj nivo zatvoren za određene operacije, iscrpeli ceo univerzum, iterativni karakter pojma skupa nas podseća da operaciju „skup od” možemo dalje iterirati, te da tu nije kraj.

Sledeći Vangovi (Hao Wang) redovi mogu da pomognu u razumevanju. Govoreći o metodima opravdanja aksioma velikih kardinala, Vang objašnjava:

Drugi metod opravdanja aksioma beskonačnosti je putem principa refleksije. Iterativni pojam skupa implicira da je univerzum svih skupova veoma velik. Kada smo izrazili određena svojstva univerzuma, već možemo naći skupove koji imaju ova svojstva. (...) On [princip refleksije – prim. prev.] kaže da nikada ne uspevamo da zahvatimo univerzum onime što pozitivno posedujemo (ili možemo da izrazimo), a karakterizacija je zadovoljena određenim (velikim) skupovima.²²

²¹ Adžić, M., *Gedel o aksiomatizaciji teorije skupova*, str. 203.

²² Wang, H. „The concept of set” u *Philosophy of mathematics: Selected readings* (priredili P. Benacerraf i H. Putnam.), Cambridge University Press, Cambridge 1983, str. 554 – 555.

Međutim, gorenavedena formulacija principa refleksije nije dovoljno precizna. Navodeći principe za koje Gödel predlaže da se koriste prilikom opravdanja novih aksioma, Vang objašnjava:

Princip refleksije: univerzum svih skupova se strukturalno ne može odrediti (*structurally undefinable*). Jedan način da se ovo tvrđenje načini preciznim je sledeće: Univerzum skupova ne može na jedinstven način biti karakterisan (tj., razlikovan od svih svojih inicijalnih segmenata) ma kojim unutrašnjim strukturalnim svojstvom ϵ -relacije, koje se može izraziti bilo kojom logikom konačnog ili transfinitnog tipa, uključujući infinitarne logike ma kog kardinalnog broja.²³

Tako, princip refleksije možemo izraziti na sledeći način:

Princip refleksije. *Ako univerzum V zadovoljava neko svojstvo φ , onda postoji ordinal α takav da V_α zadovoljava svojstvo φ .*²⁴

Primene ovog principa ćemo videti ubrzo. Napomenimo da neće svako dobro određeno svojstvo univerzuma V garantovati postojanje skupa sa tim svojstvom.²⁵ Recimo, instanca principa refleksije „Ako univerzum V sadrži sve ordinale, onda postoji skup koji sadrži sve ordinale” je lažna. Stoga, treba biti oprezan prilikom instanciranja principa refleksije.

Pogledajmo kako Gödel komentariše aksiome koje tvrde postojanje nedostiživih i Maloovih kardinala.

Najjednostavnija među ovim „aksiomama beskonačnosti” tvrdi postojanje nedostiživih brojeva (u jačem ili slabijem smislu) [tj. tvrdi postojanje slabo ili jako nedostiživih kardinala – prim. prev.] (...). Potonja aksioma, grubo govoreći, ne podrazumeva ništa drugo do da totalitet skupova koji se mogu dobiti korišćenjem procedura izraženih drugim aksiomama takođe formira skup (i, dakle, novu osnovu za dalju primenu ovih procedura). Druge aksiome beskonačnosti su isprva bile formulisane od strane P. Maloa [Friedrich Paul Mahlo – prim. prev.]. Ove aksiome jasno pokazuju, ne samo da je danas korišćeni aksiomatski sistem teorije skupova nepotpun, nego i da se bez proizvoljnosti može dopuniti novim aksiomama koje samo dalje razvijaju sadržaj pojma skupa (...).²⁶

Primenom principa refleksije možemo opravdati postojanje nedostiživih, Maloovih, ali i nekih drugih velikih kardinala. Na primer, univerzum V zado-

²³ Isto, str. 540.

²⁴ U Vangovom citatu, princip je formulisan kao ekvivalencija. Međutim, strana zdesna na levo je jasna na osnovu uobičajene karakterizacije V i nečega što bi u ovakvima neformalnim razmatranjima odgovaralo pojmu elementarnog podmodela.

²⁵ Adžić, M., *Gödel o aksiomatizaciji teorije skupova*, str. 209.

²⁶ Gödel, K. „What is Cantor's continuum problem? 1964”, str. 260 – 261.

voljava instance sheme zamene. Dakle, postoji ordinal α takav da V_α zadovoljava instance sheme zamene. Pri tome, ordinal α će biti jako nedostiživ.²⁷

Pored unutrašnjeg, može se ponuditi i spoljašnje opravdanje ovakvih aksioma. Pre svega, postuliranje egzistencije ovih kardinala povlači rešenje nekog diofantovskog problema.²⁸ Pored toga, tu su i rezultati relativne konzistentnosti Soloveja koji pretpostavljaju egzistenciju nedostiživog kardinala.²⁹

Međutim, ovi kardinali ne mogu da posluže prilikom rešavanja Kantorovog problema. Kardinali poput nedostiživih i Maloovih pripadaju grupi kardinala koji se nazivaju *mali veliki kardinali*. Mali veliki kardinali su veliki kardinali čija je egzistencija konzistentna sa $V = L$. Stoga, čak i da neka od aksioma koja tvrdi postojanje malih velikih rešava Kantorov problem kontinuumu, ona bi ga rešila na nezadovoljavajući način, jer bi dokazivala *CH*.

Kako već rekosmo, Gedel pominje još jednog kandidata za novu aksiomu. To je aksioma koja postulira egzistenciju kardinala koji je daleko veći od do sada razmotrenih. Taj kardinal se zove *merljiv kardinal*. Grubo govoreći, to je prvi ordinal koji je pomenen kada univerzum V transformišemo na način da očuvamo istinitost tvrdjenja koja u njemu važe.

Postojanje ovih kardinala ima veoma zanimljive posledice. Naime, Skot (Dana Scott) je pokazao da postojanje merljivog kardinala povlači da $V \neq L$. Drugim rečima, ako postoji merljiv kardinal, postoje i skupovi koji nisu konstruktibilni. Štaviše, ako postoji merljiv kardinal, postoje nekonstruktibilni skupovi celih brojeva.

Međutim,

[n]ije načinjeno potpuno jasnim da su ove aksiome implicirane opštim pojmom skupa na isti način kao i Maloove.³⁰

Zadovoljavajuće opravdanje, pozivanjem na princip refleksije, sastojalo bi se u tome da se objasni da je κ merljiv akko je V_κ zatvoreno za neke operacije.³¹ Međutim, nije jasno da li takvo opravdanje postoji.

U vezi sa opravdanjem postojanja merljivog kardinala principom refleksije, treba imati u vidu sledeće. Objašnjavajući primenu principa refleksije pri opravdanju nekih malih velikih kardinala, Vang dodaje:

Oni su takođe bili korišćeni pri opravdanju većih kardinala. Ali, na primer, principi refleksije drugačijeg oblika koji su dovoljno jaki da opravdaju merljive

²⁷ Reinhardt, W. N., „Remarks on reflection principles, large cardinals, and elementary embeddings”, *Proceedings in Symposia in Pure Mathematics*, br. 13 (2), str. 190 – 191.

²⁸ Gödel, K., „What is Cantor’s continuum problem? 1964”, str. 267.

²⁹ Maddy, P., „Believing the Axioms. I”, str. 504.

³⁰ Gödel, K., „What is Cantor’s continuum problem? 1964”, str. 260 – 262.

³¹ Adžić, M., *Gedel o aksiomatizaciji teorije skupova*, str. 264.

kardinale (...) ne izgledaju kao da su jasno implicirani iterativnim pojmom skupa.³²

Govoreći o principima refleksije „drugačijeg oblika”, Vang misli na ono što Martin naziva „pseudo-princip refleksije (*pseudo-reflection principle*)”,³³ a što se odnosi na Rajnhardovo (W. N. Reinhardt) shvatanje principa refleksije. U Rajnhardovu poziciju se nećemo udubljavati. Ipak, treba napomenuti da Rajnhardove varijante principa refleksije pravdaju postojanje kardinala poput merljivih, ali i veće velike velike kardinale. Međutim, one nemaju oblik zadovoljavajućeg opravdanja, kako smo ga gore okarakterisali.³⁴

Međutim, unutrašnje opravdanje nije jedini, kao ni odlučujući, vid opravdanja. Postojanje merljivog kardinala je pretpostavka bogata posledicama. Pored do sada navedenih u vezi sa konstruktibilnim skupovima, navedimo još svega jednu.³⁵

Suslin (Андрей Александрович Суслин) je pokazao da se u okviru teorije *ZFC* može dokazati da svaki neprebrojiv $\sum_1^1$ skup ima savršen podskup. Međutim, ako teoriji *ZFC* pridodamo tvrđenje POSTOJI MERLJIV KARDINAL, onda možemo pokazati da i svaki neprebrojiv $\sum_2^1$ skup ima savršen podskup, tako „proširivši” Suslinov stari rezultat.

Nažalost, iako je „Gedelovo predviđanje da će postuliranje velikih kardinalnih brojeva iznedriti nove činjenica o celim i realnim brojevima” tačno, kako kaže Medijeva,³⁶ ipak nas postuliranje postojanja merljivog kardinala neće odvesti ka rešenju Kantorovog problema. Levi (Azriel Lévy) i Solovej su pokazali da je *CH* nezavisno u odnosi na teoriju *ZF* + POSTOJI MERLJIV KARDINAL. Štaviše, ovo se može generalizovati na praktično sve velike kardinale. Pouka u vezi sa velikim kardinalima jeste da, ne samo da ne pružaju

³² Wang, H. „The concept of set”, str. 555.

³³ Maddy, P., „Believing the Axioms. I”, str. 506.

³⁴ Rajnhard je svoje stanovište izneo u Reinhardt, W. N., „Remarks on reflection principles, large cardinals, and elementary embeddings”. Za kritike Rajnhardove pozicije, videti Adžić, M., *Gedel o aksiomatizaciji teorije skupova*, str. 261 – 264 i Maddy, P., „Believing the Axioms. II”, *The Journal of Symbolic Logic*, br. 53 (3), str. 753 – 754. Zanimljivo je primetiti da je, u razgovoru sa Rajnhardom, Gödel istakao da mu se Rajnhardovo opravdanje aksioma čini nezadovoljavajućim (Reinhardt, W. N., „Remarks on reflection principles, large cardinals, and elementary embeddings”, str. 189). Prema Gödelovom mišljenju, analizom pojma strukturalnog svojstva pojma skupa bi se postiglo bolje opravdanje. Međutim, sam Rajnhard objašnjava da je njegovo shvatanje strukturalnih svojstava aproksimacija Gödelovih.

³⁵ Za listu dosta više rezultata koji su posledice postojanja merljivog kardinala, a koji bi onda pružili spoljašnje opravdanje postuliranja postojanja merljivog kardinala, videti Maddy, P., „Believing the Axioms. I”, str. 506 – 508.

³⁶ Isto, str. 506.

zadovoljavajuće rešenje Kantorovog problema, nego da ne pružaju rešenje uopšte.

Međutim, iako nas aksiome velikih kardinala ne vode direktno rešenju Kantorovog problema, ipak se iz njih može nešto naučiti, slično kao i u slučaju „nastanka” iterativnog pojma skupa i razloga za postuliranje aksioma *ZFC*. Imamo spoljašnje opravdanje koje nas ovlašćuje da postuliramo postojanje, recimo, merljivog kardinala. Međutim, iterativni pojam skupa je nedorečen u pogledu aksioma velikih velikih kardinala. Ukoliko pristanemo na postojanje velikih velikih kardinala, onda moramo proučavati posledice tih aksioma, što će rezultirati boljim razumevanjem pojma skupa. Možda će se pokazati da je insistiranje na iterativnom aspektu pojma skupa potpuno neopravdano, te da se moramo okrenuti nekom drugom aspektu, a možda će se pokazati i da je to insistiranje opravdano, ukoliko taj pojam učinimo još jasnijim.

AKSIOMA KONSTRUKTIBILNOSTI

Šaljivdžija je jednom sugerisao da da je Gedel objavio da je *dokazao* hipotezu kontinuuma, umesto njene puke *konzistentnosti*, više ne bi bilo problema kontinuuma.

Začudo, Gedel je skoro učinio baš to (...).³⁷

U pojedinim trenucima svoje karijere, Gedel jeste verovao u istinitost $V = L$, pa i, *ipso facto*, u istinitost CH . Međutim, negde oko 1944. godine je promenio mišljenje.³⁸

Kada je Gedel objavio da je dokazao konzistentnost CH , takođe je dodao:

Čini se da iskaz (...) [$V = L$ – prim. prev.], kada je dodat kao nova aksioma, daje prirodno upotpunjenje aksioma teorije skupova, utoliko što određuje nejasan pojam proizvoljnog beskonačnog skupa na nedvosmislen način.³⁹

Prihvatanje $V = L$ nije rasprostranjeno u skupovno-teorijskoj zajednici. Pogledajmo šta o $V = L$ kaže Jensen (Ronald Jensen), jedan od retkih koji tu aksiomu prihvata:

³⁷ Isto, str. 492.

³⁸ Isto.

³⁹ Gödel, K. „The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis” u Kurt Gödel. *Collected works. Volume II. Publications 1938 – 1974*. (priredili S. Feferman, J. W. Dawson Jr., S. C. Kleene, G. H. Moore, R. M. Solovay i J. van Heijenoort), Oxford University Press, Oxford 1990, str. 27.

Ova aksioma na jasan način govori o prirodi matematičkog univerzuma. Matematički je plodna jer rešava mnogo problema i vodi do zanimljivih pojmova i teorija. Filozofski je privlačna jer podržava „Okamov brijač“, koji kaže da treba izbegavati suvišne egzistencijalne tvrdnje. Lično nalazim ovu aksiomu za veoma privlačnu.⁴⁰

Opravdanja u vidu ontološke štedljivosti dolazi uz spoljašnje opravdanje aksiome konstruktibilnosti. Pored toga što aksioma konstruktibilnosti rešava Kantorov problem kontinuuma i dokazuje AC , ona je dokazuje neka zanimljiva kombinatorna tvrdjenja. Recimo, najpoznatije među tim tvrdjenjima je $\diamond$ princip i neke njegove varijante. Na tragu Godelovog citata gore, možemo dodati da nam $V = L$ omogućava razjašnjenje nekih skupovno-teorijskih pojmova, u prvom redu, pojma partitivnog skupa.⁴¹

Jensen objašnjava da

[a]ksioma konstruktibilnosti sa jedne strane i veliki kardinali (...) sa druge, otežavaju dva radikalno različita shvatanja univerzuma skupova. (...) Većina zagovornika $V = L$ i sličnih aksioma pravdaju svoje verovanje blagom verzijom Okamovog brijača. L je adekvatan za svu matematiku; daje jasne odgovore na duboka pitanja; vodi zanimljivoj matematici. Zašto bi trebalo pretpostaviti više? Zagovornici jakih aksioma beskonačnosti obično sebe nazivaju platonistima i to koriste da opravdaju svoje uverenje. Međutim, ne razumem zašto nas verovanje u objektivno postojanje skupova obavezuje da tražimo sve jače egzistencijalne postulate. Zašto platonizam nije kompatibilan sa blagim oblikom Okamovog brijača (...)? Nešto drugo mora da je u pitanju.⁴²

Zaista, čini se da Jensen u pravu. Godel je, na primer, bio platonista i u vreme kada je pisao redove citata sa početka odseka. Jensenova „dijagnoza“ problema je veoma zanimljiva, ali se nećemo upuštati u nju.⁴³

U Godelovom slučaju, nije njegovo odbacivanje $V = L$ neposredna posledica puke činjenice da je on platonista. Po svemu sudeći, radi se o tome da, prema Godelovom mišljenju, $V = L$ protivreči pojmu skupa.

Kao što smo ranije pomenuli, Godel je verovao da iz

aksiome koja je u nekom smislu ovoj [$V = L$ – prim. prev.] suprotna, negacija Kantorove pretpostavke možda može biti izvedena. Mislim na aksiomu koja bi (slično Hilbertovoj aksiomi potpunosti u geometriji) tvrdila neko maksimalno

⁴⁰ Jensen, R., „Inner Models and Large Cardinals“, *The Bulletin of Symbolic Logic*, br. 1 (4), str. 397 – 398.

⁴¹ Doduše, protivnici aksiome konstruktibilnosti veruju da je to učinjeno na jedan veštački, neprirodan način. Tako i rešenje Kantorovog problema kontinuuma nosi iste atribute.

⁴² Isto, 400.

⁴³ Čitalac može naći Jensenovo objašnjenje u Jensen, R., „Inner Models and Large Cardinals“, str. 400 – 401.

svojstvo sistema svih skupova, gde aksioma A [$V = L$ – prim. prev.] tvrdi minimalno svojstvo. Primetimo da se čini da *samo maksimalno svojstvo može biti usklađeno sa pojmom skupa* (...).⁴⁴ [kurziv Đ. V.]

Hilbertova (David Hilbert) aksioma potpunosti u geometriji garantuje da je euklidska geometrija maksimalna struktura koja zadovoljava druge aksiome euklidske geometrije.⁴⁵ Aksioma koja ovoj nalikuje je fon Nojmanova (John von Neumann) *aksioma ograničenja veličine*. Ta aksioma garantuje da je klasa A skup akko ne postoji bijekcija iz A u univerzum skupova V . Gedel objašnjava da je ova aksioma veoma zanimljiva budući je ona

princip maksimalnosti (*maximum principle*), unekoliko sličan Hilbertovoj aksiomi potpunosti u geometriji. Jer, grubo govoreći, ona kaže da bilo koji skup koji, u nekom dobro određenom smislu, ne povlači protivrečnosti postoji. To što je princip maksimalnosti takođe objašnjava činjenicu da ova aksioma povlači aksiomu izbora. Verujem da osnovni problemi apstraktne teorije skupova, kao što je Kantorov problem kontinuuma, mogu biti rešeni na zadovoljavajuć način samo uz pomoć jačih aksioma ove vrste, koji su u izvesnom smislu suprotni ili komplementarni konstruktivističkoj interpretaciji matematike.⁴⁶

Ako shemu zamene i aksiome unije i izbora, zamenimo fon Nojmanovom aksiomom, one postaju teoreme.

Pogledajmo i kako Vang objašnjava vezu između iterativnog pojma skupa i principa maksimalnosti:

[H]ipoteze koje za cilj imaju obogaćivanje sadržaja partitivnog skupa (...) ili da uvedi više ordinala u skladu su sa intuitivnim modelom. Verujemo da je kolekcija svih ordinala veoma „dugačka” i da je svaki partitivni skup (beskonačnog skupa) veoma „debeo”. Stoga, bilo koja aksioma koja ima takve posledice je u skladu sa našim intuitivnim pojmom.⁴⁷

Aksioma konstruktibilnosti u velikoj meri ograničava „debljinu” partitivnog skupa, budući ga ograničava samo na skup svih definabilnih podskupova datog skupa. Da li aksioma konstruktibilnosti ograničava i „visinu”, shodno iterativnom pojmu skupa, nije u potpunosti jasno. Naime, rekli smo da postojanje merljivog kardinala povlači da $V \neq L$. Ukoliko bi analizom pojma skupa sledilo postojanje merljivog kardinala, onda bismo sa sigurnošću mogli da kažemo da aksioma konstruktibilnosti ograničava i „visinu” hijerarhije skupova. Međutim, to nije potpuno jasno.

⁴⁴ Gödel, K. „What is Cantor’s continuum problem? 1964”, str. 262 – 263.

⁴⁵ Moore, G. H., „Introductory note to 1947 and 1964” str. 168.

⁴⁶ Citirano prema: Moore, G. H., „Introductory note to 1947 and 1964”, str. 168.

⁴⁷ Wang, H. „The concept of set”, str. 553.

Za kraj, napomenimo da ova varijanta principa maksimalnosti nije ista kao ona koju Medijeva razmatra u svojim do sada citiranim radovima. Ta varijanta principa maksimalnosti je daleko jača, bar naizgled, utoliko što pruža neposredno opravdanje postuliranja velikih velikih kardinala samo na temelju činjenice što ti skupovi uvećavaju univerzum skupova, a bez obzira na to da li je jasno kako ti skupovi mogu biti dobijeni iteracijom operacije „skup od”.

ZAKLJUČAK

S jedne strane, aksiome velikih kardinala ne pružaju rešenje Kantorovog problema kontinuum. S druge strane, aksioma konstruktibilnosti ne pruža adekvatno rešenje. Međutim, neke varijante Gedelovog programa nalaženja novih aksioma žive i danas. Bilo da su platonisti ili da nastupaju samo iz pozicije nekakvog metodološkog platonizma, matematičari nastavljaju da tragaju za novim aksiomama koje treba da reše elementarno i prirodno pitanje kojim smo se u ovom radu, iz ugla Gedelove filozofije matematike, bavili. Ovo pitanje se čini od fundamentalnog značaja, ne samo za matematiku, nego i za filozofiju matematike. Utoliko je prirodno što mu je Gödel tokom svoje karijere posvećivao punu pažnju, a možda je i to razlog što matematičari ne odustaju od njegovog rešavanja.

LITERATURA

- Adžić, M., *Gödel o aksiomatizaciji teorije skupova*, Doktorska disertacija, Beograd 2004.
- Gödel, K., „What is Cantor's continuum problem? 1947” u *Kurt Gödel. Collected works. Volume II. Publications 1938 – 1974*. (priredili S. Feferman, J. W. Dawson Jr., S. C. Kleene, G. H. Moore, R. M. Solovay i J. van Heijenoort), Oxford University Press, Oxford 1990.
- Gödel, K., „What is Cantor's continuum problem? 1964” u *Kurt Gödel. Collected works. Volume II. Publications 1938 – 1974*. (priredili S. Feferman, J. W. Dawson Jr., S. C. Kleene, G. H. Moore, R. M. Solovay i J. van Heijenoort), Oxford University Press, Oxford 1990.
- Gödel, K., „The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis” u *Kurt Gödel. Collected works. Volume II. Publications 1938 – 1974*. (priredili S. Feferman, J. W. Dawson Jr., S. C. Kleene, G. H. Moore, R. M. Solovay i J. van Heijenoort), Oxford University Press, Oxford 1990.
- Jensen, R., „Inner Models and Large Cardinals”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, br. 1 (4).
- Maddy, P., „Believing the Axioms. I”, *The Journal of Symbolic Logic*, br. 53 (2).

- Maddy, P., „Believing the Axioms. II”, *The Journal of Symbolic Logic*, br. 53 (3).
- Moore, G. H., „Introductory note to 1947 and 1964” u *Kurt Gödel. Collected works. Volume II. Publications 1938 – 1974*. (priređili S. Feferman, J. W. Dawson Jr., S. C. Kleene, G. H. Moore, R. M. Solovay i J. van Heijenoort), Oxford University Press, Oxford 1990.
- Reinhardt, W. N., „Remarks on reflection principles, large cardinals, and elementary embeddings”, *Proceedings in Symposia in Pure Mathematics*, br. 13 (2).
- Wang, H. „The concept of set” u *Philosophy of mathematics: Selected readings* (priređili P. Benacerraf i H. Putnam.), Cambridge University Press, Cambridge 1983.

ĐORĐE VUKAŠINOVIĆ

University of Belgrade, Faculty of Philosophy

GÖDEL ON CANTOR'S CONTINUUM PROBLEM II:
CANTOR'S CONTINUUM PROBLEM

Abstract: *Cantor's continuum problem* is the question: How many points are there on a line in Euclidean space? Cantor (Georg Cantor) believed that the number of points on a line, i.e. the cardinality of the continuum, is the first infinite cardinal that comes after the cardinality of the set of natural numbers. This is a rough formulation of Cantor's continuum hypothesis. Cantor repeatedly tried to prove the continuum hypothesis during his career. However, his efforts did not bear fruit. At the beginning of the 20th century, set theory was formulated as an axiomatic theory. That axiomatic theory is called *Zermelo-Frenkel set theory with axiom of choice*, i.e., *ZFC* set theory. Based on the results of Kurt Gödel and Paul Cohen, we know that the *ZFC* theory neither proves nor disproves Cantor's hypothesis, leaving Cantor's continuum problem unsolved. However, according to Gödel, Cantor's continuum problem can be solved by extending *ZFC* set theory with new axioms that will give us a more complete insight into the structure of the universe of sets. This paper is the second in a series of two papers in which we aim to present some of Gödel's proposals for an approach to solving Cantor's continuum problem, as well as Gödel's Platonist philosophical position underlying those proposals. In this paper, we aim to present Gödel's proposals for new axioms and their consequences, together with the justification that can be offered in support of those principles. We will first present Gödel's reactions to the views according to which Cantor's continuum problem is solved by proving the independence of *CH*. We will then consider Gödel's opinion on the truth of *CH*. We will then state some of the strong axioms of infinity and their consequences for Cantor's problem. Finally, we will consider the axiom of constructibility as a candidate for a new axiom.

Keywords: Gödel, Platonism, set theory, the continuum hypothesis

Primljeno: 2.3.2025.
Prihvaćeno: 8.5.2025.