Arhe IX, 17/2012
UDK 511.48 : 1 Descartes R.
Originalni naučni rad
Original Scientific Article

GORAN RUJEVIĆ[1]
Novi Sad

TEORIJSKE PRETPOSTAVKE DEKARTOVE „GEOMETRIJE“

Sažetak: Dekartovo matematičko mišljenje, koje je prikazano u njegovoj „Geometriji“, zasnovano je na nekoliko pojmovnih pretpostavki koje ga odvajaju od prethodnika. Podležeća ideja *mathesis universalis* kao izvora svih nauka omogućava mu da sprovede adekvatnu sintezu algebre i geometrije koja nije jednostrano svođenje geometrije na algebru, već njihovo suštinsko ujedinjavanje. Analitička metoda koju on primenjuje na probleme je istinski matematička, pošto se sastoji u nalaženju korena jednačina. Te jednačine su, opet, moguće na osnovu pojma matematičke promenljive. Jednačine se mogu koristiti za opisivanje geometrijskih figura time što mogu da iskazuju odnose između određenih tačaka figure i tačaka koordinatnog referentnog sistema. Time se osobine figure pretvaraju u veličine, a ujedno se i same figure povezuju sa idealnim vidovima kretanja. Značaj ovih pretpostavki uočava se u tome što Dekart uspeva da reši matematičke probleme koji su do tada smatrani za nerešive.

Ključne reči: algebra, analiza, geometrija, Dekart, jednačina, *mathesis universalis*, promenljiva, veličina

Početak Dekartove „Geometrije“ ujedno je i početak analitičke geometrije. Na tom početku Dekart stupa *in medias res* matematičke misli, sa teorijskim uvodom koji pregnantno iskazuje njegovu nameru u samo jednoj rečenici: „Bilo koji geometrijski problem može se lako svesti na takve termine da je znanje dužina izvesnih pravih linija dovoljno za njegovo konstruisanje“[2]. Pojam analitičke geometrije se nipošto ne iscrpljuje u primeni analitičke metode na rešavanje geometrijskih problema. Zapravo, ono što se u „Geometriji“ sprovodi jeste rešavanje geometrijskih problema kroz algebru, ukoliko se algebra shvata kao grana čiste matematike koja se bavi zakonitostima matematičkih operacija (naspram koje se aritmetika, kao matematička nauka koja se bavi količinama,

---

1 e-mail adresa autora: zauberberg.ns@gmail.com

2 *The Geometry of René Descartes with a facsimile of the first edition* (trans. D. E. Smith and M. L. Latham), The Open Court Publishing Company, Chicago, 1925., str. 2 (prevod G. R.)

operacijama bavi u smislu njihove primene na brojeve). Prvi problem na kom Dekart demonstrira naprednost svog pristupa jeste takozvani Papov problem, stari geometrijski problem za koji su antički matematičari mislili da je nerešiv, a koji se sastoji u nalaženju geometrijskog mesta tačaka čije udaljenosti od izvesnog broja datih pravih linija stoje u stalnom odnosu. Kada bi u okviru tog problema bilo dato pet ili više pravih linija, antički geometri nisu mogli da dođu do valjanog rešenja. To ne znači da nisu mogli da nađu primere tačaka koje ispunjavaju zadate uslove, jer to je bilo sasvim izvodivo, ali zadatak nalaženja geometrijskog mesta tačaka nije samo u tome da se pronađu pojedinačne tačke, nego i pravilna figura koju *sve* takve tačke opisuju. Za date tri ili četiri prave, te tačke bi se nalazile na nekoj od tri krive koje su starima bile poznate kao kupini preseci, te je u tom smislu problem bio rešiv; ali, kad je bilo dato više od četiri prave, kriva bi dobijala neku nepoznatu formu koju su antički matematičari prosto zvali – linijom. Dekart upućuje kritiku antičkim matematičarima: „Ovo [postupak izložen u „Geometriji“] je jedna stvar koju antički matematičari nisu primetili, jer inače ne bi morali uložiti toliko truda u pisanje mnogobrojnih knjiga u kojima sam redosled iskaza ukazuje na to da nisu posedovali siguran metod za nalaženje svih [konstrukcija geometrijskih problema], već su pre sakupljali one iskaze na koje su slučajno naišli“[3]. On je, dakle, zahtevao da se u matematici primenjuje postupak kojim bi se na jednostavan način došlo do opštih rešenja matematičkih problema, i to ne putem geometrijske konstrukcije, kako je to bio običaj u prošlosti, već nalaženjem korenova određenih jednačina[4]. Kao uslov mogućnosti takvog postupka, pored primene analitičke matematičke metode i ideje sinteze algebre i geometrije, ključni su bili opšti pojmovi veličine i kretanja, potom pojam matematičke promenljive, i, najzad, koncept univerzalne matematike – *mathesis universalis*.

METODA ANALIZE I SINTEZA ALGEBRE I GEOMETRIJE

Dekart nije utemeljitelj analitičke metode u matematici, pa čak ni analitičke metode samo u geometriji. Jedno od opštih mesta u skoro svakom antičkom tekstu koji se bavi matematičkim problemima jeste razlikovanje analitičke i sintetičke metode. Upravo na taj način i počinje sedma knjiga Papovog „Zbornika“: „Analiza je put kojim od traženog, koje uzimamo kao da je rešeno, preko posledica koje iz toga proizilaze, stižemo do onoga što je sintezom već pouzdano utvrđeno. U sintezi, naprotiv, koristimo suprotan pravac, u kom se ono poslednje do čega se analizom došlo postavlja kao već utvrđeno, a da ono što iz

3 *Ibid.*, str. 17 (prevod G. R.)

4 Šajković, R., *Descartes i njegovo delo I*, Filozofsko društvo Srbije, Beograd, 1978., str. 140

toga sledi ovog puta uredimo kao ono što je u prirodnom sledu tome pretpostavljeno, te da to dvoje dovedemo u povezanost, i time napokon da dođemo do načina konstrukcije onoga što je traženo. Ovo nazivamo sintezom“[5]. Dakle, ako se analizom pronađe veza između traženog (teoreme koja se treba proveriti ili problema koji se treba rešiti) i poznatog (već utvrđene deduktivne strukture iskaza zasnovane na aksiomima), neophodno je sintezom integrisati tu novoutvrđenu vezu u tu istu strukturu iskaza sa kojom je povezana. Antičke metode matematičke sinteze i analize, prema tome, u neposrednoj su vezi sa logičkim pojmovima sinteze i analize. Naime, dok sinteza odgovara nesumnjivom deduktivnom izvođenju tvrdnji iz aksioma, analiza je u bitnom logičko kretanje „unazad“, dakle od postavki prema aksiomima, što po prirodi stvari nužno utiče na vrstu relacije koja se uspostavlja između njih. Postupak matematičke sinteze može se predstaviti kroz složeni silogizam modusa *ponendo ponens* u kom se iz istinitosti premise koja je aksiom i premisa koje uspostavljaju lanac implikacije od aksioma do teoreme, dokazuje istinitost teoreme. U slučaju analize, međutim, lanac implikacija ide u pravcu od teoreme ka aksiomu. Implikacija kao logička relacija nije reverzibilna, te u postupku analize iz istinitosti aksioma (koji u analizi ima ulogu konsekvensa) ne možemo ništa zaključiti o istinitosti teoreme (koja u analizi ima ulogu antecedensa). Saznanje dobijeno postupkom sinteze je logički nužno uvek istinito (sve dok su premise istinite), dok saznanje dobijeno postupkom analize može, a i ne mora biti tačno, jer iza nje ne stoji nikakva logička nužnost[6]. Moric Kantor tvrdi da u antičkoj matematici, postupku analize uvek sledi sinteza, ne da bi se manjak logičke nužnosti analize nadoknadio pouzdanošću sinteze, već zato što se analiza zapravo ni ne koristi za dokazivanje teorema, već za utvrđivanje njihovih pretpostavki, koje je neophodno znati kako bi se ti stavovi potom sintezom dokazali[7].

Dekart postupak matematičke analize određuje na sledeći način: „Ako želimo rešiti bilo koji problem, prvo pretpostavimo da je rešenje već proizvedeno, pa onda imenujemo sve linije koje su neophodne da bi se to rešenje konstruisalo, bile one trenutno poznate ili nepoznate. Potom, ne praveći razliku između poznatih i nepoznatih, moramo razviti problem na onaj način koji najprirodnije pokazuje odnose među tim linijama, sve dok ne dođemo u položaj da jednu veličinu možemo izraziti na dva načina... i to moramo

5 *Die Sammlung des Pappus von Alexandrien, zweiter Band* (hrsg. C. I. Gerhardt), H. W. Schmidt Verlag, Halle, 1871., str. 3 (prevod G. R.)

6 Cantor, M., *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, erster Band*, B. G. Teubner Verlag, Leipzig, 1880., str. 189

7 *Ibid.*, str. 189-190

učiniti onoliko puta koliko ima nepoznatih linija“[8]. On se ne koristi logičkim stavovima, već algebarskim izrazima; između njih ne uspostavlja logičku relaciju implikacije, već matematičku relaciju jednakosti. Za razliku od deduktivnog niza i relacije implikacije, dobro konstruisana jednačina *jeste* reverzibilna, odnosno ista je kada se čita i sa leva na desno i sa desna na levo (samo u odnosu na znak jednakosti, naravno). To znači da u Dekartovom pristupu ne postoji suštinska razlika između metode koja ide „unapred“ i metode koja ide „unazad“ – sinteza i analiza ovde poseduju istu vrednost dokazivanja. Time, međutim, sinteza i analiza nisu u potpunosti izjednačene, jer analiza i dalje zadržava preimućstvo nad sintezom po pitanju pronalaženja rešenja problema. Sinteza je za Dekarta suvišna, a njegove konkretne demonstracije u „Geometriji“ ne smeju se mešati sa sintezom. „U slučaju geometrije, analiza pruža opštu proceduru, ali u sebi samoj ne proizvodi geometrijsku figuru ili konstrukciju kao rešenje za problem, a sve dok to ne bude učinjeno, stari nisu smatrali da je problem rešen“[9].

Radmila Šajković smatra da su dve stvari bile ključne za stvaranje analitičke geometrije: Dekartova upotreba koordinata, i njegova primena algebre u geometriji. „Bez ova dva elementa, i to uzeta zajedno i nerazdvojno jedan od drugog, ne bi se uopšte moglo dogoditi ovo veliko otkriće u matematici“[10]. Otkriće iracionalnih brojeva, te specifična ograničenja koja su Grci postavljali i aritmetici i geometriji, osnovni su razlozi zbog kojih u prošlosti nije bilo moguće izvesti adekvatnu primenu aritmetike (a time ni algebre) u geometriji. Spoznaja da dijagonala kvadrata ne može biti izmerena njegovom stranicom, odnosno da postoje duži čije se dužine ne mogu izraziti kao odnos dva cela broja, ukazala je na to da se tadašnjom aritmetikom nije mogla na valjan način izraziti tadašnja geometrija. „Pri takvim se razmišljanjima uočava suprotnost broja (*arithmos*) i kontinuirane veličine (*megethos*). Ova druga je neograničeno djeljiva prepolovljavanjem (dihotomijom), a broj to nije“[11]. Dakako, među antičkim matematičarima je bilo mnogo pokušaja da se problemi takve vrste makar teorijski razmotre, ako već ne mogu biti razrešeni; Diogen Laertije već za samog Pitagoru kaže: „Mnogo vremena proveo je proučavajući aritmetiku u vezi s geometrijom“[12]. Međutim, većina pokušaja ili su bili neuspešni, ili bi se na neki način sveli na beskonačno ponavljanje jedne radnje – pri čemu bismo se uvek samo približavali

8 *The Geometry of René Descartes with a facsimile of the first edition*, str. 6 i 9 (prevod G. R.)

9 Gaukroger, S., *Dekart: Metodologija* u *Renesansa i racionalizam sedamnaestog veka* (priredio Dž. H. R. Parkinson), Plato, Beograd, 2007., str. 209

10 Šajković, R., *Descartes i njegovo delo I*, str. 141

11 Becker, O. *Veličina i granica matematičkog načina mišljenja*, Demetra, Zagreb, 1998., str. 77

12 Laertije, D., Životi i miš*ljenja istaknutih filozofa*, Dereta, Beograd, 2003., str. 279

samerljivosti dijagonale kvadrata stranicom, ali nikada je ne dostizali.

Kod Dekarta postoji primena algebre na geometriju, ali tu se ne može govoriti o prostoj aritmetizaciji niti algebraizaciji geometrije, što tvrdi i Bojer u ogledu „Descartes and the Geometrization of Algebra“. On zastupa tezu da „Dekart nije imao nameru da aritmetizuje geometriju. U stvari, svrha *Geometrije* bi se sasvim validno mogla opisati kao prevođenje algebarskih operacija na jezik geometrije“[13]. Bojer se poziva na Dekartov stav da se sve veličine, bez izuzetka, mogu izraziti kao linije, a njih, opet, zbog jednostavnosti držanja u umu, treba izraziti ciframa. Između ostalog, ovaj postupak omogućava da se prevaziđu ograničenosti predstavljanja, pošto je sada moguće da se veličine koje su umnožene, kvadrirane ili dignute na neki viši stepen razmatraju kao duži[14] (umesto kao površine, zapremine ili nešto što je ljudskom umu nezamislivo). Ništa u Dekartovoj „Geometriji“ ne pokazuje da je on preferirao bilo geometriju, bilo algebru. „Iako je Dekart zaista preveo geometrijske probleme na jezik algebre, to mu nije bio cilj po sebi; to je bio samo jedan korak u procesu određivanja najadekvatnije geometrijske konstrukcije. Samim tim, njegova teorija jednačina, koja je pre algoritam linija nego brojeva, podjednako se može opisati i kao aritmetizacija geometrije i kao geometrizacija algebre“[15]. To je savršeno u skladu sa onim što Henk Bos tvrdi za Dekartovu matematiku – da za njega geometrijski problem i dalje zahteva geometrijsko rešenje[16]. U pitanju, dakle, nije jednosmerna algebraizacija geometrije nego njihovo objedinjavanje. Međutim, svako objedinjavanje mora da ima neki princip po kome se vrši. Sem upotrebe koordinatnog sistema kao značajnog metodološkog sredstva, bitno za sprovođenje sinteze algebre i geometrije bilo je Dekartovo uvođenje pojma kretanja u matematiku, te upotreba opšteg pojma veličine, kao i upotreba matematičkih promenljivih.

OPŠTI POJMOVI KRETANJA I VELIČINE

Neophodno je napraviti razliku između kretanja kao *metodološkog pojma* i kretanja kao *epistemološkog pojma*. Naime, ako kretanje shvatimo kao metodološki

13 Boyer, C. B., *Descartes and the Geometrization of Algebra*, u *The American Mathematical Monthly*, vol. 66, no. 5, Mathematical Association of America, 1959., str. 390 (prevod G. R.)

14 Strojk, D. J., *Kratak pregled istorije matematike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1991., str. 121

15 Boyer, C. B., *Descartes and the Geometrization of Algebra*, str. 394 (prevod G. R.)

16 Bos, H. J. M., *René Descartes*, u *The Princeton companion to mathematics* (ed. T. Gowers), Princeton University Press, Princeton, 2008., str. 739

pojam, to znači da mu pripisujemo ulogu sredstva za dolaženje do istine, ne međutim i istine same po sebi. Metodološki pojam kretanja zauvek ostaje izvan i pored polja znanja odgovarajuće nauke, iako je s njime skoro neraskidivo vezan. Kod Dekarta je, međutim, reč o epistemološkom pojmu kretanja, a to je kretanje koje ravnopravno učestvuje u epistemološkom polju jedne nauke, kretanje koje sačinjava znanje te nauke; ono, ipak, time nije ujedno i nužan predmet te nauke, jer jedine nauke koje za svoj predmet imaju kretanje su različite grane mehanike. Ako kretanje postoji kao epistemološki pojam neke nauke, iako samo nije predmet o kome ta nauka može da zna, ono doprinosi znanju pravog predmeta te nauke, ili, drugim rečima, znanje predmeta te nauke u sebi može da uključi i znanje kretanjem.

Pojam kretanja, koji je podrazumevao promenljivost, nije mogao ući u epistemološko polje antičke geometrije, jer su, prema tada dominantnoj platonovskoj koncepciji, u predmete geometrije spadali večni i nepromenljivi oblici i njihovi isto tako večni i nepromenljivi odnosi. To, međutim, ne znači da se kretanje ni na koji način nije moglo naći u razmatranjima antičkih geometara. Njime se, na primer, služi pitagorejac Arhita, za koga Laertije kaže: „ On je prvi mehaniku doveo u jedan sistem primenjujući principe matematike; takođe je prvi primenio mehaničko kretanje prilikom jedne konstrukcije, kad je, naime pokušao da pomoću preseka polucilindra (poluvaljka) pronađe dve srednje proporcionale da bi udvostručio kocku“[17]. Slični postupci pripisuju se i Eudoksu i Menehmu. Platon, koji je geometriju držao za uzvišenu disciplinu u dodiru sa samim idejama, svakako nije mogao dopustiti da se ta nauka bavi nečim promenljivim kao što je kretanje. Jedan odeljak iz Plutarhovih „Života“ govori o reakciji na to što su Eudoks i Arhita upotrebljavali instrumente i čulne opite pri rešavanju problema: „Kada je Platon izrazio svoje oštro neslaganje, i to sa velikim negodovanjem, sa njihovim kaljanjem i unižavanjem izvrsnosti geometrije time što su je spustili iz oblasti netelesnog i umskog u oblast telesnog i čulnog, i prisilili je da radi sa materijom, što zahteva dosta ručnog rada koji spada u neslobodne veštine; tada je mehanika odvojena od geometrije“[18]. Ali Arhita nikad nije kretanje postavio kao predmet geometrije, već ga je samo koristio prilikom konstrukcije rešenja problema. Njegova najpoznatija konstrukcija podrazumeva apstraktno predstavljanje kompleksnog preseka čak tri tela koja se dobijaju kretanjem geometrijskih figura. Ipak, u toj konstrukciji se traže samo *tačke preseka* ovih triju tela, a kretanje se koristi samo zarad njihovog preciznijeg i lakšeg *predstavljanja*. Samo kretanje u bitnom ne ulazi u određenje tih tačaka, ono se samo pokazuje kao najjednostavniji

17 Laertije, D., Životi i miš*ljenja istaknutih filozofa*, str. 298

18 *Plutarch's Lives*, Applegate and Co., Cincinnati, 1857., str. 216 (prevod G. R.)

način da se do tih tačaka dođe; zapravo, ono što je u čitavoj konstrukciji bitno jeste da se tri figure koje su osnove tih tela dovedu u položaj presecanja – u tom „trenutku“ svako kretanje slobodno može da prestane i figure mogu ostati u mirovanju. To nam najbolje pokazuje da kretanje ovde nije suština po sebi, već samo sredstvo, instrument za dolaženje do suštine. Dakle, kretanje kakvo ga Arhita koristi nije epistemološki pojam kretanja, već samo metodološki. Ne postoji nikakva naznaka da se Platon protivio kretanju kao metodi dolaženja do rešenja geometrijskih problema. Uostalom, svaka konstrukcija podrazumevala je nekakvo kretanje, bilo pisaljke, bilo šestara. U „Državi“, Platon razlikuje geometra od filozofa po tome što je duša geometra „prisiljena da istražuje iz hipoteza, ne prema početku i onome što je prvo, nego prema onome što je na kraju i završetku“[19]. Platon prihvata da geometri, iako se bave večnim stvarima, svoje teorije moraju dokazivati crtežima i konstrukcijama, koje su evidentno nesavršene, što uključuje i dopuštanje kretanja.

Kretanje kojim se Dekart bavi u „Geometriji“ je matematički pojam, preciznije, kretanje se može koristiti za opisivanje izvesnih krivih linija za koje do tada nije postojalo znanje o njihovim suštinama. Iz ekspozicije Papovog problema može se uvideti da stari matematičari nisu poimali pravilnosti unutar izvesnih krivih linija, nisu čak ni poimali da izvesne krive dele istu prirodu i da pripadaju istoj vrsti, već su ih sve razmatrali pojedinačno. Drugim rečima, oni nisu imali jasne i razgovetne pojmove o tim krivim linijama – nisu bili jasni zato što nisu uvideli njihovu prirodu, njihovu suštinu, a nisu bili ni razgovetni pošto nisu mogli da razlikuju krive različitih vrsta niti da prepoznaju kada je reč o dvema krivima iste vrste. Podela krivih linija na „geometrijske“ i „mehaničke“ ne može biti zasnovana na kriterijumu konstrukcije, po čemu u mehaničke krive spadaju one za čiju je konstrukciju potrebna neka pokretna mašina ili instrument, jer bi, prema tome, i krug spadao u mehaničke krive, jer se ne može konstruisati bez pomoći šestara, koji je ipak instrument. Prema tome: „...nemamo ništa više prava da [iz geometrije] isključujemo složene krive nego one jednostavnije, pod uslovom da se mogu opisati neprekidnim kretanjem ili sa nekoliko uzastopnih kretanja, od kojih je svako u potpunosti određeno onim koje mu je prethodilo; jer na ovaj način uvek možemo doći do preciznog znanja o veličinama“[20]. Ovo ne znači da apsolutno svaka kriva linija pripada području geometrije – linije koje su delom prave a delom krive, recimo, ne spadaju u geometrijske linije zato što Dekart smatra da ljudski um nije sposoban da spozna odnose između njihovih segmenata. Sam postupak konstrukcije nije toliko zanačajan koliko je bitno znati odnos

19 Platon, *Država*, Dereta, Beograd, 2005., str. 166

20 *The Geometry of René Descartes with a facsimile of the first edition*, str. 43 (prevod G. R.)

između svih tačaka krive i tačaka jedne referentne prave (ose koordinatnog sistema). Taj odnos se ne određuje za svaku tačku posebno, već se iskazuje opštom jednačinom koja važi za čitavu krivu. Upravo je ta jednačina suštinski opis i jednog apstraktnog kretanja kojim se može opisati data kriva linija. Konkretna kriva se potom može konstruisati odabirom izvesnih ključnih tačaka te krive, određivanjem njihovog položaja u sistemu koordinata, te aproksimiranjem izgleda krive te na osnovu dobijenih rezultata. Za veću preciznost crteža uvek se može koristiti veći broj tačaka, ali to nipošto nije presudno, jer svaka konstrukcija je samo nesavršeno predstavljanje, dok je suština poznavanja krive u poznavanju njene jednačine. Da se kod Dekarta radi o kretanju kao epistemološkom pojmu, a ne kao pukom pomoćnom sredstvu, možemo suditi i na osnovu toga što Dekart pojam kretanja u „Geometriji“ uvek upotrebljava u kontekstu da izvesno kretanje može da „opiše“ krivu. Pri tome se pod opisivanjem ne misli nužno na slikovito predstavljanje (iako je i to moguće sa pojmom koji ima iskustvenu komponentu, a kretanje je svakako takav pojam), već to opisivanje može da označava izvesnu zajedničku karakteristiku, u ovom slučaju jednačinu. Naravno, takvo kretanje je idealizovan vid kretanja kome ne odgovara ni jedno realno kretanje, isto kao što ni jedna konkretna geometrijska konstrukcija ne odgovara u potpunosti geometrijskim figurama.

Sličan stav iznosi i Ernst Kasirer kada o Dekartovoj upotrebi pojma kretanja u matematici kaže: „Sada se krive više ne razmatraju iz gotovih čulnih slika. Umesto toga, one su sada proizvod kretanja: a pojmovna određenost tih proizvođenja proizilazi iz određenosti samog kretanja... Sa primenom kretanja u proizvođenju i određivanju krivih uveden je jedan nov i važan pojmovni princip u geometriji“[21]. Jer, za razliku od Grka, kojima je kretanje u matematici samo pomoćno sredstvo isključivo čulnog i empirijskog karaktera, za Dekarta „kretanje ne znači empirijski određenu stvarnost, već je samo izraz opšteg pojma promene“[22]. Međutim, Kasirer iznosi stav da je za Dekartovu geometriju od pojma kretanja mnogo bitniji pojam *veličine*. Ono što su grčki matematičari prepoznavali kao dva različita predmeta – brojeve i figure, *arithmos* i *megethos* – za Dekarta su samo primeri jedinstvenog pojma veličine. Način i princip kojim se ovi „različiti“ predmeti mogu svesti na izvorni predmet veličine, jeste pojam dimenzije, koji ne znači „ništa drugo do način ili razlog po kome se neki predmet smatra merljivim“[23]. Pri tom se samo merenje

21 Cassirer, E., *Descartes' Kritik der mathematischen und naturwissenschaftlichen Erkenntnis*, Marburg, 1899., str. 11-12 (prevod G. R.)

22 *Ibid.*, str. 12 (prevod G. R.)

23 Dekart, R., *Praktična i jasna pravila rukovođenja duhom u istraživanju istine*, Srpsko filozofsko društvo, Beograd, 1952., str. 151

vrši upoređivanjem predmeta sa nekom proizvoljno izabranom veličinom koja se zove *jedinica*. Dimenziju može da ima bilo šta što se može izmeriti, dakle i prostor, ali i brzina. Dimenzija kao veličina bez sadržaja zato omogućava izjednačavanje kvaliteta koji su pre toga smatrani za raznovrsne i nesamerljive, ona čini mogućim da se svaka osobina predstavi kroz jasnu i razgovetnu ideju protežnosti: „Ovde se, dakle, ne bavimo ničim drugim do protegnutim predmetom, ne uzimajući u njemu ništa drugo u obzir osim same njegove protege, i namerno se uzdržavajući da upotrebimo reč kvantitet, pošto su neki filozofi pokazali toliko tananosti da su razlikovali kvantitet od protege“[24].

Funkcija koordinatnog referentnog sistema u analitičkoj geometriji je da obezbedi neophodno referentno telo spram kog će se vršiti merenje i izjednačavanje karakteristika analiziranog geometrijskog oblika. Iako Dekart u „Geometriji“ ne upotrebljava koordinatni sistem u pravom smislu te reči (nigde se ne govori o „koordinatama“ pojedinačnih tačaka), osnovna ideja dovođenja tačaka ispitivane figure u odnos sa tačkama na nekoj referentnoj liniji je prisutna. Uostalom, u čitavom referentnom sistemu od krucijalnog značaja je samo koordinatni početak, jer početak je ono apsolutno spram čega će sve ostalo biti upoređivano; same koordinatne ose mogu biti postavljene proizvoljno (kao što je bio slučaj i sa pojmom jedinice). Matematičar potom vrši merenje elemenata figure spram odgovarajućih osa (drugim rečima, dovodi ih u međusobni odnos) i time pretvara kvalitete tela u protežne veličine, što na kraju i omogućava da figura bude opisana jednačinom.

NEPOZNATE, PROMENLJIVE I UNIVERZALNA MATEMATIKA

Te jednačine, međutim, nisu puke relacije brojeva. Svaka jednačina koju Dekart konstruiše u „Geometriji“ sadrži elemente koji upućuju na nepoznate, neodređene veličine, a koji često bivaju obeleženi poslednjim slovima alfabeta i inače su poznati kao *nepoznate* i *promenljive*. Značajna je razlika koja se može napraviti između pojmova promenljive i nepoznate s obzirom na Dekartov sistem znanja. Pod nepoznatom se misli vrednost koja u zadatom problemu doslovno nije poznata, a koja se treba utvrditi na osnovu drugih elemenata koji su u problemu dati, te da se time problem smatra rešenim. U strogom smislu, za Dekarta je ovakav pojam nepoznate nemoguć. Sama pretpostavka da se na osnovu datih podataka u problemu može doći do tačne vrednosti te „nepoznate“ ukazuje na to da je ona još od samog početka bila jednoznačno određena, što znači da ona uopšte nije bila nepoznata, već je samo bila izražena na *za nas* nejasan i nerazgovetan način. U svakom problemu koji se sastoji iz toga da se u izvesnoj složenoj jednačini

24 *Ibid.*, str. 151

pronađe vrednost „nepoznate" *x*, to *x* je određeno već u samoj postavci jednačine, jer ona ga dovodi u nužnu vezu sa svojim ostalim elementima. „Svaki u potpunosti određen matematički problem u sebi mora nositi uslove svog rešenja"[25]. Problem je čisto formalan i čisto subjektivan, pošto je *x* za *nas* nepoznato samo usled toga što je forma jednačine takva da naš um nije u stanju jasno i razgovetno da pojmi određenosti i odnose unutar nje. Stoga se rešavanje jednačine sa „nepoznatom" *x* svodi na njeno transformisanje u za nas sve jasnije i razgovetnije forme, sve dok se odnos nesumnjivo ne uvidi. Pri tom se sve te transformacije sprovode u skladu sa analitičkom metodom, jer se sa onim traženim *x* postupa kao da je dato (to jest, na njemu se vrše sve operacije koje bi bile vršene i na datom broju). Dakako, najjednostavnija, najjasnija, najrazgovetnija, te i najnesumnjivija forma je „*x*=...". Osoba koja se redovno vežba u rešavanju ovakvih jednačina s vremenom bi uspela da uoči odnose i određenosti (a time i rešenje) u sve komplikovanijim formama jednačine. To onda znači da nejasnost i nerazgovetnost nisu osobine jednačina, već našeg znanja o njima.

Što se tiče jednačina sa više nepoznatih ili kvadratnih i kompleksnijih jednačina, jednoznačna određenost nestaje, jer za *x* ili možemo naći više mogućih vrednosti, ili nalazimo da vrednost *x*-a zavisi od neke druge „nepoznate" vrednosti *y*, *z*... Takve jednačine se onda mogu smatrati „nerešivim" ukoliko se pod rešenjem smatra jednoznačno izražavanje *x*-a u formi „*x*=...". Ali, favorizovanje takve forme u matematici je samo proizvoljna odluka, jer ona sadržajno nije bitno drugačija od bilo koje ranije forme iz koje je (pravilno) izvedena. Čak i ako se iz jednačine ne može jednoznačno izraziti *x*, ona i dalje izražava izvestan odnos između svojih elemenata, jer to je suština matematičke jednačine. Zbog toga i takve „nerešive" jednačine pripadaju matematici, s tim što u njima više ne stoji „nepoznata" *x*, već *promenljiva x*. Pod promenljivom podrazumevamo onaj element jednakosti koji može da ima različite vrednosti. Ne može, naravno, svaka promenljiva da ima bilo koju vrednost, jer ona i dalje ostaje bitno određena odnosom koji iskazuje sama jednačina.

Ovakav pojam promenljive nije eksplicitno tematizovan u „Geometriji", ali je svakako jedan od značajnijih pojmovnih pretpostavki samog spisa. Pre svega, pojam promenljive na izvrstan način reprezentuje Dekartovo shvatanje suštine matematike kao nauke koja se bavi odnosima među brojevima i figurama – jer promenljiva zadobija svoje vrednosti u zavisnosti od odnosa u koji je neka jednačina stavlja; čak i ako to nije jednoznačan odnos, ili je odnos sa nekom drugom promenljivom, i dalje je *matematički* odnos. Nadalje,

25 Cassirer, E., *Descartes' Kritik der mathematischen und naturwissenschaftlichen Erkenntnis*, str. 6 (prevod G. R.)

promenljiva je nužan element primene analitičke metode, jer bez upotrebe promenljive, koja po definiciji može da poprimi različite vrednosti, ne možemo ni da započnemo analizu sa pretpostavkom da je problem već rešen. Ona takođe predstavlja neophodno sredstvo prilikom povezivanja algebre i geometrije, jer promenljiva može da učestvuje i u odnosima u kojima vrednosti nisu međusobno samerljive. Promenljiva u sebi uključuje i mogućnost kretanja, što se može jasno uočiti kod jednačina sa dve nepoznate, gde sa promenom arbitrarne vrednosti jedne promenljive dolazi do promene vrednosti ove druge (jednačine koje opisuju krive linije su upravo jednačine sa dve promenljive). Upotreba promenljivih je takođe u saglasnosti sa Dekartovim postupkom konstrukcije krivih linija, po kom proizvoljno biramo tačke krive i ucrtavamo njihov položaj, pa na osnovu njih konstruišemo krivu, jer taj postupak ne znači ništa drugo do proizvoljno biranje vrednosti jedne promenljive kako bi se dobila vrednost druge.

Promenljiva, dakle, u Dekartovoj matematici poseduje osobine i metodološkog i epistemološkog pojma. Ona je i sredstvo kojim se dolazi do jasnog i razgovetnog znanja, ali i ono što biva tim znanjem znano. Dekart je tražio način da rešavanju matematičkih problema podari opšti, naučni karakter, a pojam promenljive u sebi sadrži mogućnost takve opštosti. Promenljiva omogućava opšte jednačine koje izražavaju suštinu jedne čitave klase objekata, ali i dalje zadržava mogućnost da poprimi bilo koju valjanu vrednost, te time postane izraz za konkretan, pojedinačan slučaj. Bez upotrebe promenljive Dekart ne bi bio u stanju da reši Papov problem, ali promenljiva po sebi nije poslednji razlog za to. Nju, naime, omogućava jedna dublja i opštija ideja Dekartovog učenja, ideja *mathesis universalis*.

Ova ideja jeste podležeća pretpostavka Dekartove misli i igra značajnu ulogu u formiranju njegovog naučnog znanja. Uprkost zastupljenom prevodu „univerzalna matematika“, *mathesis universalis* nije matematika, već je opšta nauka napravljena po matematičkom modelu, povodom čega i Dekart kaže: „...ja ovde ni na šta drugo ne mislim manje nego na običnu matematiku, već ovde izlažem drugu jednu disciplinu kojoj je matematika odeća, a ne sastavni deo“[26]. On ovde ne pravi samo etimološku referencu na izvorno značenje reči „matematika“ kao „disciplina“ ili „znanje“, već nas ujedno upućuje i na određenje matematike kao nauke koja se bavi odnosima i merama između brojeva i figura; analogno tome, univerzalna matematika bi se bavila redom i merom bez obzira na specifičnost sadržaja. Ta jedinstvena nauka je izvor svih drugih nauka (i time je bolja od njih), zato što sadrži prve rudimente ljudskog uma, koji nisu ništa drugo do prvi zametci istine koje je priroda položila u ljudski duh: „...univerzalna matematika nosi u sebi sve

26 Dekart, R., *Praktična i jasna pravila rukovođenja duhom u istraživanju istine*, str. 99

ono zbog čega su druge nauke nazvane delovima matematike."[27].

Univerzalna matematika takođe podrazumeva ne samo mogućnost znanja odnosa stvari, već i saznanja iz odnosa stvari: „...sve stvari se mogu rasporediti u izvesne redove ne zato što se podvode pod izvestan rod bića, kao što ih filozofi dele u svoje kategorije, već zato što se jedne drugim mogu saznati"[28]. Dalje, iz samog pojma *mathesis universalis*, možemo zaključiti o mogućnosti ne samo algebraizacije geometrije, nego i geometrizacije algebre, jer sama *mathesis universalis* nije matematika, niti geometrija, niti algebra, već je njihov temelj i izvor, te time i uslov mogućnosti njihovog objedinjavanja. Dekart takođe postavlja alternativu po kojoj se celokupno ljudsko znanje može dobiti ili preko proste i čiste intuicije jedne pojedinačne stvari, ili kroz upoređivanje dva ili više predmeta. To upoređivanje se vrši uvek na osnovu neke zajedničke prirode tih predmeta, i to na način da se „srazmere [zajedničke prirode] svedu na to da se jasno vidi jednakost između onoga što se istražuje i nečega što je saznato. Zatim treba primetiti da se na ovu jednakost može svoditi samo ono što ima svojstvo da može biti manje ili veće, a sve to se podrazumeva terminom veličine"[29]. A veličina koja se, prema Dekartu, najlakše i najrazgovetnije spoznaje je – veličina protege. Upravo preko protežnosti univerzalna matematika dolazi u dodir prvo sa fizikom, a potom i sa svim ostalim naukama. Dakle, ne samo što je Dekartova fizika matematična, već ona u svom temelju sadrži i ideal matematičnosti. Na ovaj način postaje jasno da je *mathesis universalis* za Dekarta pretpostavljeni objedinjujući princip sveg znanja, i kao takva predstavlja onu bitnu tačku oslonca koja je nedostajala antičkim matematičarima. Iako je vremenom ova ideja univerzalne matematike možda izbledela iz koncepcija matematičara, ili je, pak, bila zamenjena nekakvim drugačijim objedinjujućim principom, nesumnjivo ostaje da je ona kao *prvi* takav princip omogućila prvo adekvatno rešenje ne samo Papovog, već i mnogih drugih sličnih matematičkih problema.

LITERATURA

Die Sammlung des Pappus von Alexandrien, zweiter Band (hrsg. C. I. Gerhardt), H. W. Schmidt Verlag, Halle, 1871.

Plutarch's Lives, Applegate and Co., Cincinnati, 1857.

The Geometry of René Descartes with a facsimile of the first edition (trans. D. E. Smith

27 *Ibid.*, str. 102

28 *Ibid.*, str. 104

29 *Ibid.*, str. 146

and M. L. Latham), The Open Court Publishing Company, Chicago, 1925.

Becker, Oskar, *Veličina i granica matematičkog načina mišljenja*, Demetra, Zagreb, 1998.

Bos, Henk J. M., *Redefining geometrical exactness: Descartes' transformation of the early modern concept of construction*, Springer-Verlag, New York, 2001.

Bos, Henk. J. M., *René Descartes*, u *The Princeton companion to mathematics* (ed. T. Gowers), Princeton University Press, Princeton, 2008.

Boyer, C. B., *Descartes and the Geometrization of Algebra*, u *The American Mathematical Monthly*, vol. 66, no. 5, Mathematical Association of America, 1959.

Cantor, Moritz, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, erster Band*, B. G. Teubner Verlag, Leipzig, 1880.

Cassirer, Ernst, *Descartes' Kritik der mathematischen und naturwissenschaftlichen Erkenntnis*, Marburg, 1899.

Dekart, Rene, *Praktična i jasna pravila rukovođenja duhom u istraživanju istine*, Srpsko filozofsko društvo, Beograd, 1952.

Gaukroger, Stiven, *Dekart: Metodologija* u *Renesansa i racionalizam sedamnaestog veka* (priredio Dž. H. R. Parkinson), Plato, Beograd, 2007.

Laertije, Diogen, Životi i mišljenja istaknutih filozofa, Dereta, Beograd, 2003.

Platon, *Država*, Dereta, Beograd, 2005.

Strojk, Dirk J., *Kratak pregled istorije matematike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1991.

Šajković, Radmila, *Descartes i njegovo delo I*, Filozofsko društvo Srbije, Beograd, 1978.

GORAN RUJEVIĆ
Novi Sad

THEORETICAL PRESUPPOSITIONS OF DESCARTES' "GEOMETRY"

Abstract: Descartes' mathematical thought, given to us in his "Geometry", is based on several conceptual presuppositions which separate him from his predecessors. The underlying idea of *mathesis universalis* as the source of all sciences enables him to adequately synthesize algebra and geometry, which is not a one-sided reduction of geometry to algebra, but rather their unification. The analytical method that he applies to problems is truly mathematical, as it consists of finding roots of equations. These equations are, in turn, possible due to another concept, that of a mathematical variable. Equations can be used to describe geometrical figures, as they can express the relations between certain points on the figure and certain points on the coordinate reference system. Qualities of the figure are thereby translated into magnitudes, and the figures themselves are at the same time associated with certain ideal motions. The importance of these presuppositions is evident from Descartes' ability to solve mathematical problems that were previously deemed unsolvable.

Keywords: algebra, analysis, Descartes, equation, geometry, magnitude, *mathesis universalis*, variable

Primljeno: 28. 1. 2012.
Prihvaćeno: 2. 4. 2012.